

**ANNALES DU BACCALAUREAT SENEGALAIS**

**MATHEMATIQUES**

**SERIE S2**

**Les épreuves de 1998 à 2009**

**Dakar, le 20 Février 2012**

**AVANT-PROPOS**

**On trouvera dans ces annales :**

- les énoncés de la plupart des sujets de mathématiques proposés au Bac S2 pour la période allant de 1998 à 2009.
- à la suite, les corrigés de tous ces sujets (vingt-et-un en tout).

**Nous faisons trois recommandations fondamentales à l'élève utilisant ce manuel :**

**1°) Il est inutile de chercher un exercice sur un thème tant qu'on n'a pas bien maîtrisé le cours portant sur ce thème ;**

**2°) Il est indispensable de commencer par chercher à résoudre les exercices et les problèmes par soi-même, de préférence en rédigeant soigneusement la solution comme si on devait la présenter à un professeur. Il ne faut surtout pas consulter trop vite les corrigés.**

**3°) Une lecture passive des corrigés sans effort préalable de la part de l'élève ne lui serait d'aucune utilité.**

**Lors de la rédaction de ces corrigés, nous avons essayé d'être le plus détaillé possible, de manière que même un élève peu doué puisse suivre. Nous avons ajouté parfois des remarques sur la difficulté des sujets ou sur les écueils qu'il faut éviter.**

**Les figures ont toutes été réalisées grâce à des logiciels informatiques et, pour des raisons techniques, il n'a pas été possible de respecter les unités imposées par les sujets.**

**L'Auteur**

# TABLE DES MATIERES

## ENONCES

BAC S2	2009	1 <sup>er</sup> groupe .....	
BAC S2	2008	2 <sup>e</sup> groupe .....	
BAC S2	2008	1 <sup>er</sup> groupe (2 <sup>ème</sup> sujet).....	
BAC S2	2008	1 <sup>er</sup> groupe (1 <sup>er</sup> sujet).....	
BAC S2	2007	1 <sup>er</sup> groupe .....	7
BAC S2	2006	2 <sup>e</sup> groupe .....	9
BAC S2	2006	1 <sup>er</sup> groupe .....	11
BAC S2	2005	2 <sup>e</sup> groupe .....	13
BAC S2	2005	1 <sup>er</sup> groupe .....	14
BAC S2	2004	Remplacement .....	16
BAC S2	2004	2 <sup>ème</sup> groupe .....	18
BAC S2	2004	1 <sup>er</sup> groupe .....	20
BAC S2	2003	1 <sup>er</sup> groupe .....	22
BAC S2	2002	2 <sup>ème</sup> groupe .....	25
BAC S2	2002	1 <sup>er</sup> groupe .....	27
BAC S2	2001	2 <sup>ème</sup> groupe .....	29
BAC S2	2001	1 <sup>er</sup> groupe.....	30
BAC S2	2000	Remplacement.....	32
BAC S2	2000	1 <sup>er</sup> groupe.....	34
BAC S2	1999	Remplacement.....	37
BAC S2	1999	2 <sup>ème</sup> groupe.....	39
BAC S2	1999	1 <sup>er</sup> groupe .....	40
BAC S2	1998	Remplacement.....	43

## SOLUTIONS

BAC S2	2009	1 <sup>er</sup> groupe .....	
BAC S2	2008	2 <sup>e</sup> groupe .....	
BAC S2	2008	1 <sup>er</sup> groupe (2 <sup>ème</sup> sujet).....	
BAC S2	2008	1 <sup>er</sup> groupe (1 <sup>er</sup> sujet).....	
BAC S2	2007	1 <sup>er</sup> groupe .....	7
BAC S2	2006	2 <sup>e</sup> groupe .....	9
BAC S2	2006	1 <sup>er</sup> groupe .....	11
BAC S2	2005	2 <sup>e</sup> groupe .....	13
BAC S2	2005	1 <sup>er</sup> groupe .....	14
BAC S2	2004	Remplacement .....	16
BAC S2	2004	2 <sup>ème</sup> groupe .....	18
BAC S2	2004	1 <sup>er</sup> groupe .....	20

<b>BAC S2</b>	<b>2003</b>	<b>1<sup>er</sup> groupe</b>	<b>.....22</b>
<b>BAC S2</b>	<b>2002</b>	<b>2<sup>ème</sup> groupe</b>	<b>.....25</b>
<b>BAC S2</b>	<b>2002</b>	<b>1<sup>er</sup> groupe</b>	<b>.....27</b>
<b>BAC S2</b>	<b>2001</b>	<b>2<sup>ème</sup> groupe</b>	<b>.....29</b>
<b>BAC S2</b>	<b>2001</b>	<b>1<sup>er</sup> groupe</b>	<b>.....30</b>
<b>BAC S2</b>	<b>2000</b>	<b>Remplacement</b>	<b>.....32</b>
<b>BAC S2</b>	<b>2000</b>	<b>1<sup>er</sup> groupe</b>	<b>.....34</b>
<b>BAC S2</b>	<b>1999</b>	<b>Remplacement</b>	<b>.....37</b>
<b>BAC S2</b>	<b>1999</b>	<b>2<sup>ème</sup> groupe</b>	<b>.....39</b>
<b>BAC S2</b>	<b>1999</b>	<b>1<sup>er</sup> groupe</b>	<b>.....40</b>
<b>BAC S2</b>	<b>1998</b>	<b>Remplacement</b>	<b>.....43</b>

**ENONCES**

## BAC S2 2009 1<sup>er</sup> groupe

### **EXERCICE 1 (3 points)**

1°)  $(X, Y)$  est une série statistique double. Soit  $(D_1)$  la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .  
Soit  $(D_2)$  la droite de régression de  $X$  en  $Y$ . On suppose que :

$$(D_1) : y = ax + b \text{ et } (D_2) : y = a'x + b'.$$

Soit  $r$  le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .

Etablir que  $r^2 = aa'$ .

2°) Dans une entreprise, une étude simultanée portant sur deux caractères  $X$  et  $Y$  donne les résultats suivants :

– La droite de régression de  $Y$  en  $X$  a pour équation :  $2,4x - y = 0$

– La droite de régression de  $X$  en  $Y$  a pour équation :  $3,5y - 9x + 24 = 0$ .

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ , sachant que leur covariance est positive.

b) Calculer la moyenne de chacun des caractères  $X$  et  $Y$ .

### **EXERCICE 2 (5 points)**

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre  $e$  et six qui portent le nombre  $\frac{1}{e}$ .

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par  $x$  et  $y$  les nombres lus respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point  $M$  d'affixe  $z = \ln x + i \ln y$ .

1°) Le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

**A** : «  $M$  appartient à l'axe des abscisses » ;

**B** : «  $M$  appartient à l'axe des ordonnées » ;

**C** : «  $M$  appartient aux deux axes » ;

**D** : «  $M$  n'appartient aux deux axes » ;

**E** : « l'angle  $(\vec{OM}, \vec{i})$  est égal à  $-\frac{\pi}{4}$  » ;

**F** : « le point  $M$  appartient au cercle trigonométrique ».

2°) Soit  $X$  la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance  $OM$ .

a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b) Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

### **EXERCICE 3 (5 points)**

1°) Résoudre l'équation différentielle  $(E) : y'' + 2y' + y = 0$ .

2°) Soit  $(E')$  l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + y = x + 3$ .

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $h$  définie par:  $h(x) = ax + b$  soit solution de  $(E')$ .

3°) a) Démontrer que  $g$  est solution de  $(E')$  si et seulement si  $g - h$  est solution de  $(E)$ .

b) Résoudre alors  $(E')$ .

c) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que :  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -1$ .

4°) Soit  $k$  la fonction définie par  $k(x) = (x + 2)e^{-x}$ .

a) Étudier les variations de  $k$ .

b) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{K})$  de  $k$  au point d'abscisse 0.

c) Démontrer que le point  $I(0 ; 2)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(\mathcal{K})$ .

d) Tracer  $(\mathcal{K})$  et  $(T)$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### **EXERCICE 3 (7 points)**

**1°) a)** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = 2 \ln(x+1)$

Tracer sa courbe représentative dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité : 2 cm.

**b)** Démontrer que sur  $[2 ; +\infty[$ , la fonction  $\ell$  définie par  $\ell(x) = f(x) - x$  est bijective et que l'équation  $\ell(x) = 0$  admet une solution unique  $\lambda$ .

**2°)** On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2 \ln(1 + U_n) \end{cases}$$

**a)** Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.

**b)** Démontrer par récurrence que pour tout  $n$ ,  $U_n \geq 2$ .

**c)** Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2 ; +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ .

**d)** En déduire que pour tout  $n$ , on a :  $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3} |U_n - \lambda|$ , que  $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , et que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\lambda$ .

**e)** Déterminer le plus petit entier naturel  $p$  tel que  $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$ . Que représente  $U_p$  pour  $\lambda$  ?

## BAC S2 2008 2<sup>ème</sup> groupe

### **EXERCICE 1 (3 points)**

1°) Trouver les réels a et b tels que : pour tout x appartenant à  $]0;1[ \cup ]1; +\infty[$ ,

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

2°) Par intégration par parties, calculer  $J = \int_2^3 \frac{\ln x}{(1-x)} dx$ .

### **EXERCICE 2 (5,25 points)**

Soit l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C} : z^2 + 2z + 4 = 0$ .

1°) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions de cette équation avec  $\text{Im}(\alpha) > 0$ .

a) Donner la forme algébrique de  $\alpha$  et  $\beta$ .

b) Mettre  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme trigonométrique et placer leurs images dans le plan complexe.

2°) Déterminer  $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$  en fonction de  $\beta$ . Qu'en déduire pour  $\alpha^3$  et  $\beta^2$  ?

3°) Mettre  $\beta^{24}$  sous forme algébrique.

### **EXERCICE 3 (5,75 points)**

1°) Soit (E) l'équation différentielle  $y' + 2y = 0$  où y est une fonction numérique définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer la solution f de (E) telle que  $f(0) = 1$ .

2°) Calculer  $\int_n^{n+1} e^{-2x} dx$ .

3°) Soit  $(U_n)$  la suite définie par : pour tout n entier naturel,  $U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n}$ .

a) Calculer les valeurs exactes de  $U_0$ ,  $U_1$  et  $U_2$ .

b) Démontrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Déterminer la valeur exacte de la somme  $U_0 + U_1 + \dots + U_9$ .

### **EXERCICE 4 (04 points)**

Dans une mare vivent des grenouilles. Les 30% sont des rainettes et le reste des grenouilles vertes. 10% des rainettes et 20% des grenouilles vertes sont malades. On prélève au hasard une grenouille de la mare.

On considère les événements suivants :

A : « la grenouille prélevée est une rainette malade »

B : « une rainette malade n'est pas prélevée »

C : « la grenouille prélevée n'est pas malade »

D : « Une grenouille verte non malade est prélevée »

E : « la grenouille prélevée n'est pas verte »

Calculer  $p(A)$ ;  $p(B)$ ;  $p(C)$ ;  $p(D)$  et  $p(E)$ .

### **EXERCICE 5 (02 points)**

On considère les fonctions f, g, h à variables réelles, définies par :

$$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4} \ln \frac{x-3}{x}, \quad \text{et } h(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0.$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

2°) Etudier la continuité de h.

## BAC S2 2008 1<sup>er</sup> groupe (2<sup>ème</sup> sujet)

### **EXERCICE 1 (5 points)**

1°) On considère l'équation (E) :  $z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$ .

a) Déterminer la solution imaginaire pure  $z_0$  de l'équation (E).

b) Achever la résolution de (E) (on appellera  $z_1$  la solution dont la partie imaginaire est positive et  $z_2$  la troisième solution).

2°) Le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $3i$ ,  $3 + 3i$  et  $3 - 2i$ .

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ . En déduire la nature de ABC.

3°) Soit  $f$  la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

a) Donner une écriture complexe de  $f$ .

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de  $f$ .

### **EXERCICE 2 (5 points)**

1°) Soient les équations différentielles  $(E_0) y' + y = 0$  et  $(E) y' + y = e^{-x} \cos x$ .

a) Trouver les réels  $a$  et  $b$  pour que  $h$  soit solution de (E), avec

$$h(x) = (a \cos x + b \sin x) e^{-x}.$$

b) Démontrer que  $h$  est solution de (E) si et seulement si  $f - h$  est solution de  $(E_0)$ .

c) Résoudre  $(E_0)$ .

d) Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).

e) Déterminer la solution  $g$  de (E) telle que  $g(0) = 0$ .

2°) Soit  $\ell$  la fonction définie par :  $\ell(x) = e^{-x} \sin x$ .

a) Exprimer  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

b) Etudier les variations de  $\ell$  sur  $[0 ; 2\pi]$ .

c) Calculer  $I = \int_0^{2\pi} \ell(x) dx$ .

### **EXERCICE 3 (5,5 points)**

On dispose de trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ .

$U_1$  contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ;

$U_2$  contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;

$U_3$  contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

#### **Description de l'épreuve**

L'épreuve consiste à tirer une boule dans  $U_1$ .

Si elle est verte, on la met dans  $U_2$ , puis on tire une boule dans  $U_2$ .

Si elle est rouge, on la met dans  $U_3$ , puis on tire une boule dans  $U_3$ .

#### **Questions**

A) 1°) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte.

2°) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est rouge.

3°) En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.

4°) Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.

5°) Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage.

## BAC S2 2008 1<sup>er</sup> groupe (1<sup>er</sup> sujet)

**N.B.** Ce sujet a été distribué par erreur avant le jour prévu pour l'épreuve puis a été retiré et remplacé par le sujet précédent.

### **EXERCICE 1 (5 points)**

Soit le complexe  $a = -1 - i$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \text{ et } z_1 = i \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1} \end{cases}$$

**1°)** Déterminer  $z_2$  et  $z_3$  sous forme algébrique.

**2°)** Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_n = z_{n+1} - z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

- a) Déterminer  $U_0$  et  $U_1$  sous forme algébrique.
- b) Démontrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $-a$ .
- c) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  et  $a$ .

**3°)** Soit  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ .

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $z_n$ . En déduire que  $z_n = -1 + (1+i)^n$ .

**4°) a)** Déterminer le module et un argument de  $a$ .

**b)** Donner la forme algébrique de  $z_{19}$ .

**5°)** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par  $A_0$  le point d'affixe  $z_0$ ,  $A_1$  le point d'affixe  $z_1$ ,  $A_2$  le point d'affixe  $z_2$ .

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe  $S$  qui transforme  $A_0$  en  $A_1$  et  $A_1$  en  $A_2$ .

### **EXERCICE 2 (04,5 points)**

Dans une maternité, on a relevé pour chacune des 20 naissances d'une journée, l'âge  $x$  de la mère (en années) et le poids  $y$  du nouveau-né (en kilogrammes). Les résultats sont regroupés dans le tableau à double entrée ci-dessous :

x \ y	16	18	20	22	26	Totaux
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Totaux	1	5	4	6	4	20

Donner les formules avant d'effectuer les calculs puis les réponses à  $10^{-2}$  près par défaut.

- a) Déterminer les séries marginales associées aux caractères  $x$  et  $y$ .
- b) Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.
- c) Déterminer le coefficient de corrélation de  $x$  et  $y$ . La corrélation est-elle bonne ?

**2°)** A la fin de la journée, une équipe de journalistes de passage pour les besoins d'un reportage désire prendre en photo un bébé. On suppose que les bébés ont tous les mêmes chances d'être choisis pour la photo. Soient les événements :

- A « Le bébé choisi pèse 3,2 kilogrammes »  
 B « Le bébé choisi a une maman de 22 ans »  
 A « Le bébé choisi pèse 2,8 kilogrammes »

- a) Déterminer les probabilités des événements A ; B et  $A \cap B$ . En déduire la probabilité  $p(A \cup B)$ .  
Justifier les résultats.
- b) Déterminer la probabilité  $p(C | \overline{B})$ . Justifier.

## **PROBLEME (10,5 points)**

### **PARTIE A**

Soit la fonction numérique f définie par : 
$$f(x) = \begin{cases} x+2 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, & \text{si } x < 0. \\ (2+x)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1°)** Montrer que f est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- 2°) a)** Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.
- b)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3°) a)** Etudier la continuité de f en 0.
- b)** Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$ .
- c)** En déduire que f est dérivable à gauche et à droite en 0. f est-elle dérivable en 0 ?
- 4°)** Calculer f'(x) pour **a)**  $x \in ]0 ; +\infty[$  **b)**  $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0[$ .
- 5°)** Etudier le signe de f'(x) pour  $x \in ]0 ; +\infty[$  et  $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0[$ .
- 6°)** Dresser le tableau de variation de f.
- 7°)** Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à  $] -3 ; -2[$ .
- 8°)** Tracer  $\mathcal{C}_f$ , la courbe représentative de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité : 1 cm. On mettra en évidence l'allure de  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

### **PARTIE B**

Soit g la restriction de f à  $] -\infty ; -1[$ .

- 1°)** Montrer que g définit une bijection de  $] -\infty ; -1[$  sur un intervalle J à préciser.
- 2°)** On note  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.
- a)** Calculer  $g(-2)$ . Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\ln 3$ .
- b)** Calculer  $g^{-1}'(\ln 3)$ .
- c)** Représenter la courbe de  $g^{-1}$  dans le repère précédent.

### **PARTIE C**

Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives  $x = -2$ ,  $x = -3$ ,  $y = x + 2$  et la courbe de f.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\mathcal{A}$ .

## BAC S2 2007 1<sup>er</sup> groupe

### **EXERCICE 1 (4 points)**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^3 - (3 + 2i)z + 1 - 2i = 0$ .

- 1°)
  - a) Déterminer la solution réelle de cette équation.
  - b) Montrer que  $i$  est une solution de cette équation.
  - c) Déterminer la troisième solution de cette équation.
- 2°) Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1,  $i$  et  $2 + i$ .
  - a) Déterminer le module et un argument de  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ .
  - b) En déduire la nature du triangle ABC.
  - c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
  - d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre  $I(1 + i)$  et de rayon  $r$  à déterminer.

### **EXERCICE 2 (4 points)**

1°) On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note  $p_i$  la probabilité d'apparition de la face numérotée  $i$ . Les  $p_i$  vérifient :

$$p_1 = p_2 ; p_3 = p_4 = 2p_1 ; p_5 = p_6 = 3p_1.$$

a) Montrer que  $p_1 = \frac{1}{12}$ .

b) Montrer que la probabilité de l'événement A: "obtenir 3 ou 6" est égale à  $\frac{5}{12}$ .

2°) Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible; à 5m, la probabilité d'atteindre la cible est alors  $\frac{3}{5}$ .

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette; à 7 m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à  $\frac{2}{5}$ .

On note C l'événement : " la cible est atteinte".

a) Déterminer  $p(C|A)$  et  $p(C|\bar{A})$ . En déduire que  $p(C) = \frac{29}{60}$ .

b) Déterminer  $p(A|C)$ .

3°) Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

### **PROBLEME (12 points)**

**I.** Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 + x + \ln x$ .

1°) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

2°) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  solution de l'équation  $g(x) = 0$ .

Vérifier que  $\alpha \in ]0,2;0,3[$ .

3°) En déduire le signe de  $g$  sur  $]0;+\infty[$ .

4°) Etablir la relation  $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$ .

**II.** On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**1°)** Montrer que  $f$  est continue en 0 puis sur  $]0; +\infty[$ .

**2°)** Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

**3°)** Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**4°)** Montrer que, quel que soit  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$  .

En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

**5°)** Montrer que  $f(\alpha) = -\alpha$ .

**6°)** Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

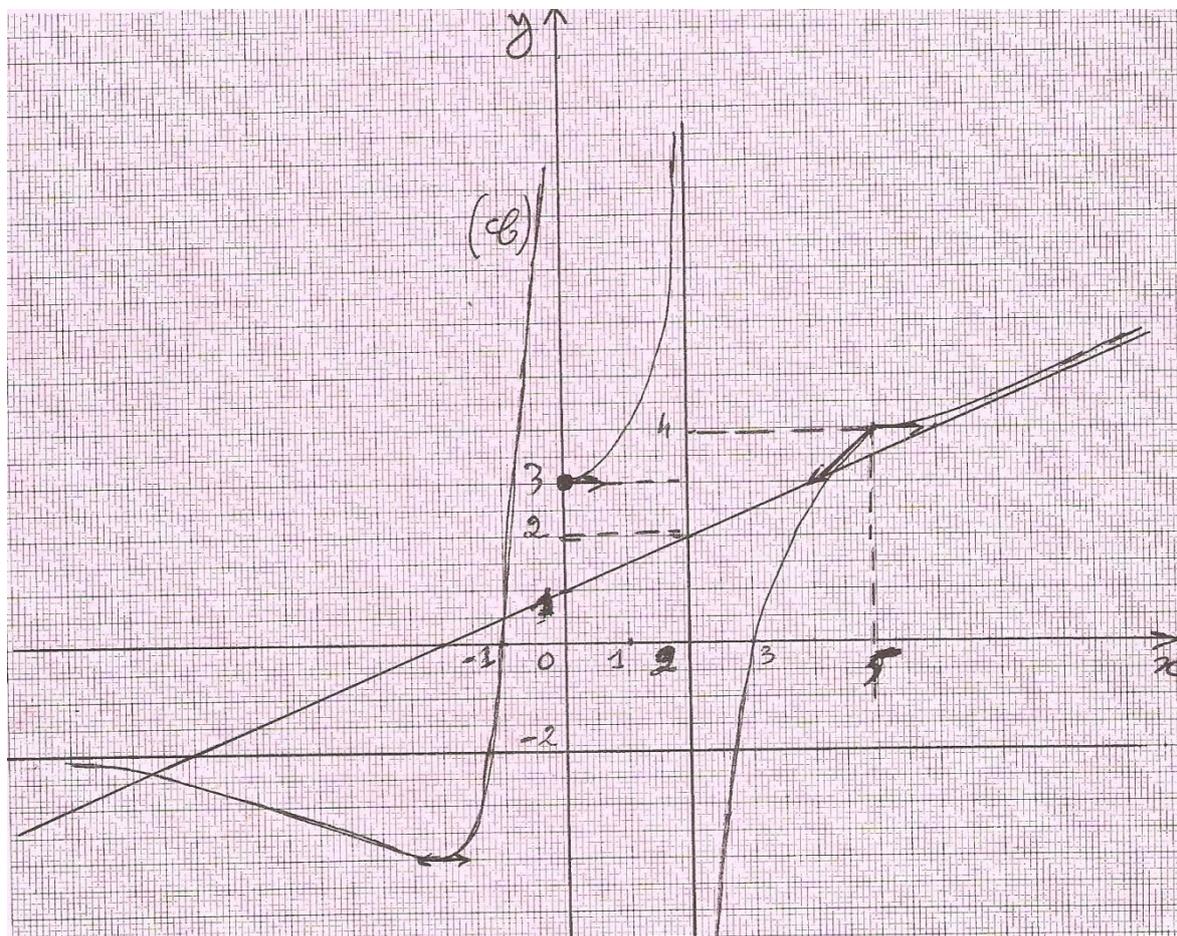
**7°)** Représenter la courbe de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
Unité graphique: 5 cm. Prendre  $\alpha \approx 0,3$ .

**III. 1°)** A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale  $I = \int_1^e x \ln(x) dx$ .

**2°)** Montrer que pour tout  $x$  élément de  $[1; e]$ ,  $\frac{x \ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{x \ln x}{2}$ .

En déduire que  $\frac{e^2 + 1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x) dx \leq \frac{e^2 + 1}{8}$ .

**EXERCICE 1**



La courbe (C) ci-dessus est celle d'une fonction  $f$  dans un repère orthonormal.  
 $f$  est définie en 0 et on a  $f(0) = 3$ .

1°) Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .

2°) Donner les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f.$$

3°) La courbe admet-elle une asymptote oblique? Si oui, donner son équation.

4°) Préciser les équations des autres asymptotes.

5°) Le fonction est-elle dérivable en 5? Justifier la réponse.

6°) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

7°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \ln(f(x))$ .

**EXERCICE 2**

1°) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

2°) a) Calculer  $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx$  ;

b) En intégrant par parties, calculer l'intégrale :  $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)} dx$ .

(On remarquera que :  $\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$  )

### **EXERCICE 3**

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .  $U_1$  contient 3 boules rouges et 4 jaunes et  $U_2$  2 rouges et 3 jaunes. On prélève au hasard une boule dans  $U_1$  que l'on remet dans  $U_2$ , puis on tire une boule dans  $U_2$ .

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : « obtenir une boule rouge de  $U_1$  ».

b) B : « obtenir une boule rouge de  $U_2$  sachant que la boule remise est rouge. »

c) C : « La boule tirée de  $U_2$  est rouge ».

### **EXERCICE 4**

Soit l'équation différentielle :  $y'' - y' - 2y = 0$ .

1°) Résoudre cette équation différentielle.

2°) Trouver la solution  $f$  de cette équation dont la courbe représentative passe par A (0 ; 2) et a en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

## BAC S2 2006 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

**1°) a)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

On désigne par  $z_1$  la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive, et par  $z_2$  l'autre solution de (E).

**b)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $\sqrt{3} + 1$ . Placer les points A, B, et C.

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

**2°)** Résoudre l'équation différentielle  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**3°)** On considère l'équation différentielle  $ay'' - by' + cy = 0$ , où a, b et c désignent trois paramètres éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur b et le troisième, celle de c.

**a)** Justifier que l'équation différentielle  $ay'' - by' + cy = 0$  a pour solutions les fonctions de la forme  $x \mapsto (A \cos x + B \sin x) e^x$ , où A et B sont des réels si et seulement si  $1 + i$  est solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation du second degré en z,  $az^2 - bz + c = 0$ .

**b)** Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto (A \cos x + B \sin x) e^x$ , A et B étant des constantes réelles.

### EXERCICE 2

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

**A-** Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

**1°)** Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 km/h et en ordonnée 1 cm pour 5 m.

**NB :** On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8 m.

**2°)** Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

**3°)** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

**4°) a)** On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

**b)** Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

**B-** Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport : Y	Particuliers $y_1$	Transporteurs en commun $y_2$
Cause des accidents : X		
Accidents liés à l'excès de vitesse : $x_1$	440	360
Accidents à cause mécanique : $x_2$	110	90

**1°)** Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude.

**2°)** Déterminer les fréquences conditionnelles  $f_{y_2/x_1}$  et  $f_{x_2/y_2}$ .

**3°)** Déterminer les fréquences marginales  $f_{.1}$  et  $f_{.2}$ .

## **PROBLEME**

**I.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $f(x) = x(1 + e^{2-x})$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

**1°)** Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$ .

**a)** Etudier les variations de  $h$  (on ne déterminera pas de limites aux bornes de  $D_h$ ).

**b)** En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $\mathbf{R}$ .

**2°)** **a)** Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**b)** Préciser la nature de la branche infinie de  $f$  en  $-\infty$ .

**c)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ , puis interpréter le résultat obtenu.

**d)** Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\Delta : y = x$ .

**3°)** **a)** Dresser le tableau de variation de  $f$ .

**b)** Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque notée  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbf{R}$ .

**c)**  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 4 ?

**d)** Etudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

**e)** Construire  $\mathcal{C}$  (on tracera la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 2).

**f)** Construire  $\mathcal{C}'$  courbe de  $f^{-1}$  dans le repère précédent.

**II.** Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.  $R_\lambda$  est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$  et les courbes d'équations respectives :  $y = f(x)$  et  $y = x$ . Soit  $\mathfrak{a}(\lambda)$  l'aire de  $R_\lambda$  en  $\text{cm}^2$ .

**1°)** Calculer  $\mathfrak{a}(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .

**2°)** Déterminer  $\mathfrak{a} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathfrak{a}(\lambda)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

## BAC S2 2005 2<sup>e</sup> groupe

### EXERCICE 1

On considère l'intégrale :  $I = \int_0^1 e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx$ .

Calculer I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

### EXERCICE 2

Soit la suite  $(z_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i. \end{cases}$$

**1°)** Calculer  $z_1$  et  $z_2$ .

**2°)** On considère la suite  $(U_n)$  définie par:  $U_n = z_n + 2$ .

**a)** Montrer que :  $U_n = (2+i)(1+i)^n$

**b)** Exprimer  $z_n$  en fonction de  $n$ .

**3°)** Soit  $M_{n+1}$ ,  $M_n$ , A et B les points d'affixes respectives  $z_{n+1}$ ,  $z_n$ ,  $i$  et  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

Démontrer que :  $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$  et que:  $(\vec{BM_n}, \vec{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$ .

### EXERCICE 3

Un arrondissement de  $m$  habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calculer la probabilité pour qu'il soit :

**a)** un homme atteint de paludisme.

**b)** une femme atteinte de paludisme.

**c)** Une personne atteinte de paludisme.

**d)** un homme non atteint de paludisme.

**e)** un homme sachant qu'il est atteint de paludisme.

**f)** une femme, sachant que cet individu est atteint de paludisme.

### EXERCICE 4

**1°)** Trouver la fonction  $f$  solution de l'équation différentielle  $y'' + 25y = 0$  vérifiant  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -5$ .

**2°)** Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $[0; 2\pi]$  par :

$$g(x) = \cos 5x - \sin 5x;$$

$\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal direct. Déterminer les points d'intersection de  $\mathcal{C}_g$  et l'axe des abscisses.

## BAC S2 2005 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

1°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $z^3 = 1$  .

2°) a) Développer  $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation  $E : z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$  .

En posant  $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$  , déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation  $E$  .

3°) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$  .

### EXERCICE 2

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente . Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où  $y_i$  représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est  $x_i$  .

$x_i$	60	80	10	120	140	160	180	200
$y_i$	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle  $x$  la variable statistique dont les valeurs sont  $x_i$  et  $y$  celle dont les valeurs sont les  $y_i$  .

1°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $y$  et  $x$  . La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2°) Déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  .

3°) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 francs.

a) Déduire de la question précédente que le bénéfice  $z$  en fonction du prix de vente  $x$  est donné par l'égalité :  $z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$  , où  $x$  et  $z$  sont exprimés en milliers de francs.

b) Déterminer le prix de vente  $x$  permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

N.B. Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

Rappel : Bénéfice = Prix de vente — Prix de revient.

## **PROBLEME**

### **PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x)$

**1°) a)** Etudier les variations de  $f$ .

**b)** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$ .

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $f$ ? Tracer cette courbe.

(Unité : 2cm).

**c)** Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -\infty ; +\infty [$  sur  $] -\infty ; 0 [$ .

**2°)** Soit  $g$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :  $g(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ .

**a)** Démontrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Montrer que quel que soit le réel  $x$ ,  $g'(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ .

**c)** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ .

**d)** Etudier les variations de  $g$  et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

**3°) a)** Montrer que  $\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ .

**b)** A tout réel  $\lambda$ , on associe le réel  $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$ . Justifier l'existence de  $I(\lambda)$ .

Calculer  $I(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties.

**c)** Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$ .

### **PARTIE B**

**1°)** Montrer que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

**2°) a)** Calculer  $g(0)$ .

**b)** Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable au point  $\ln 2$ .

**c)** Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_{g^{-1}}$  au point d'abscisse  $\ln 2$ .

# BAC S2 2004 Remplacement ENONCE

## EXERCICE 1

1°) a) Montrer que  $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^3 = 1$ . On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Dédurre des questions précédentes les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :

$$z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (E) . \text{ On remarquera que } (E) \text{ est équivalente à } \left(\frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1 .$$

2°) a) Ecrire  $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  sous forme trigonométrique.

b) En déduire les arguments des solutions de ( E ) .

3°) Dédurre des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la transformation F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :  $z' = \sqrt{2}(-1+i)z + (1+\sqrt{2})i + \sqrt{2}$  .

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F .

b) Construire l'image B du point A d'affixe  $-1$  .

## EXERCICE 2

Une étude faite sur l'effectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

X \ Y	[ 5 ; 7 ]	[ 8 ; 10 ]	[ 11 ; 13 ]	[ 14 ; 18 ]
[ 10 ; 15 ]	1	3	0	0
[ 5 ; 25 ]	5	9	8	3
[ 25 ; 35 ]	0	7	5	9

1°) Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y .

**2°)** A chaque centre  $x_i$  de classe de la série de  $X$  on associe la moyenne  $z_i$  de  $Y$  sachant que  $X = x_i$ .

**3°)** Dans la suite on considère la série  $(x, z)$  définie par le tableau suivant :

$x_i$	6	9	12	16
$z_i$	18,75	22,5	23,85	27,5

**a)** Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $z$ .

Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier la réponse).

**b)** Déterminer une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ .

**c)** Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

## **PROBLEME**

### **Partie A**

Soit l'équation différentielle ( E ) :  $-\frac{1}{2} y'' + \frac{3}{2} y' - y = 0$ .

Déterminer la solution  $g$  de ( E ) dont la courbe représentative ( C ) passe par le point A ( 0 ; - 1 ) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

### **Partie B**

**1°)** Etudier les variations de  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .

**2°)** Soit  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ; unité 2 cm.

**a)** Déterminer l'équation de la tangente à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse  $\ln 2$ .

**b)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter géométriquement le résultat.

**3°) a)** Tracer  $(\Gamma)$ .

**b)** Calculer l'aire  $A(\alpha)$  en  $\text{cm}^2$  du domaine délimité par  $(\Gamma)$ , les droites d'équations respectives :  $x = \alpha$  ( $\alpha < 0$ ),  $x = \ln 2$  et l'axe des abscisses.

**c)** Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$  et interpréter graphiquement le résultat.

### **Partie C**

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

**1°)** Démontrer que  $h$  est une bijection de  $[0 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

**2°)** Démontrer que  $h^{-1}$  est dérivable en 3 puis calculer  $h^{-1}'(3)$ .

**3°)** Déterminer  $h^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

**4°)** Tracer  $(\mathcal{C}')$  la courbe représentative de  $h^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

# BAC S2 2004 2<sup>ème</sup> groupe ENONCE

## EXERCICE 1

On considère les suites numériques  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} U_0 = e^3 & \text{et } V_n = \ln(U_n) - 2. \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$$

**1°)** Calculer  $U_1$  et  $V_1$  .

**2°)** Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

**3°)** Ecrire  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$  .

**4°)** Etudier la convergence des suites  $(V_n)$  et  $(U_n)$  .

## EXERCICE 2

1°) a) Démontrer que pour tout réel  $x$  on a :  $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$  .

b) En déduire la valeur de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$  .

2°) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \ln(1+e^x)$  .

a) Calculer la dérivée de  $f$  .

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx .$$

## EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois le dé et on note le numéro de la face de dessus.

on note  $P_i$  la probabilité de l'événement : « le résultat du lancer est  $i$  » .

**1°)** sachant que l'on a  $P_2 = P_1$  ;  $P_3 = 3 P_1$  ;  $P_4 = 2 P_1$  ;  $P_5 = 2 P_1$  ;  $P_6 = 2 P_3$  , montrer que  $P_1 = \frac{1}{15}$  et en déduire  $P_2$  ,  $P_3$  ,  $P_4$  ,  $P_5$  ,  $P_6$  .

**2°)** Calculer la probabilité de l'événement : « obtenir un numéro pair » .

**3°)** On lance cinq fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un numéro pair ?

## **EXERCICE 4**

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**1°) a)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

On donnera les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

**b)** En déduire les solutions de l'équation :

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0.$$

**2°)** Soit les points A, B d'affixes  $1 + i$ ,  $1 - i$ .

Déterminer le centre de la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  qui transforme A en B.

## BAC S2 2004 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 4$ , de raison  $\frac{1}{2}$ .

Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = \frac{\pi}{4}$ , de raison  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $z_n$  le nombre complexe de module  $U_n$  et dont un argument est  $V_n$ .

**1°) a)** Exprimer  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de  $n$ .

**b)** En déduire  $z_n$ .

**2°)** Démontrer que  $(z_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2} i$  et de premier terme

$$z_0 = 2\sqrt{2} + i 2\sqrt{2}.$$

**3°)** Soit  $(P)$  le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

**a)** Déterminer la nature de la transformation  $F$  qui au point  $M_n$  associe le point  $M_{n+1}$  d'affixe  $z_{n+1}$ .

**b)** Donner ses éléments caractéristiques.

**4°)** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$ .

**a)** Exprimer en fonction de  $n$  un argument de  $Z_n$ .

**b)** Démontrer que si  $n$  est impair, alors  $Z_n$  est réel.

### EXERCICE 2

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

**1°)** Calculer la probabilité de l'événement  $A$  : « tirer trois pièces de 500F ».

**2°)** soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.

**a)** Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

**b)** Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de  $X$ .

**3°)** L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

## **PROBLEME**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

**1°)** Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  et trouver les trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $D_f$ , on ait  $f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$ .

**2°)** Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

**3°) a)** Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .

**b)** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ .

**c)** En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

**4°)** On appelle  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dont l'unité est 2 cm.

Démontrer que les droites d'équations respectives  $y = 2x - 1$  et  $y = 2x - 2$  sont des asymptotes de  $(\mathcal{C})$  respectivement en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

Préciser l'autre asymptote.

**5°)** Soit  $x$  un réel de  $D_f$ . On considère les deux points  $M$  et  $M'$  de  $(\mathcal{C})$  d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ . Déterminer les coordonnées du milieu  $\Omega$  du segment  $[MM']$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C})$  ?

**6°)** Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .

**7°) a)** Trouver les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour tout réel  $x$  de l'ensemble  $D_f$  on ait :

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}.$$

**b)** Soit  $k$  un réel supérieur ou égal à 2.

Déterminer l'aire  $\mathcal{A}(k)$  en  $\text{cm}^2$  de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient :  $\ln 2 \leq x \leq \ln k$  et  $2x - 1 \leq y \leq f(x)$ .

**c)** Calculer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(k)$ .

## BAC S2 2003 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d' avoir un test positif à cette maladie sachant qu' il est malade est 0,8 et celle d' avoir un test négatif sachant qu' il n' est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note T l' événement « avoir un test positif à cette maladie »

M l' événement « être malade »

$\overline{M}$  l' événement contraire de M.

On rappelle que pour tous événements A et B on a :

(\*)  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$  et  $P_A(B)$  désigne la probabilité de B sachant A .

**1°) a)** Réécrire la relation (\*) pour  $A = T$  et  $B = M$  puis pour  $A = \overline{M}$  et  $B = \overline{T}$  .

**b)** En déduire que  $P(M \cap T) = P(\overline{M}) [1 - P_M(\overline{T})]$  .

**2°)** Calculer la probabilité pour qu' un individu ait un test positif à cette maladie .

**3°) a)** Calculer la probabilité pour qu' un individu soit malade sachant qu' il a un test positif à cette maladie .

**b)** Calculer la probabilité pour qu' un individu soit malade sachant qu' il a un test négatif à cette maladie .

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles .

### EXERCICE 2

Dans l' ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l' équation :

$$(E) : z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 4i = 0$$

**1°) a)** Montrer que ( E ) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

**b)** Montrer que  $1 + 2i$  et  $-2 + 3i$  sont solutions de ( E ) .

**c)** Donner l' ensemble des solutions de ( E ) .

**2°)** Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , soit les points A, B et C d'affixes respectives  $1 + 2i$ ,  $3i$ ,  $-2 + 3i$ .

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2, et 1

**a)** Montrer que les vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  ont pour affixes respectives  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $2i$  et  $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

**b)** En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.

Donner les éléments caractéristiques de cette similitude .

## **PROBLEME**

### **PARTIE A**

On considère la fonction  $u : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

**1°)** Déterminer l'ensemble de définition de  $u$  ; Calculer  $u(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .

**2°)** Etudier les variations de  $u$ .

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de  $u$  en 1).

**3°)** Déduire des résultats précédents que :

**a)**  $\forall x \in [0 ; 1[ , u(x) \geq 0$  .

**b)**  $\forall x \in ]1 ; +\infty[ , u(x) < 0$  .

### **PARTIE B**

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

**1°)** Déterminer  $D_g$  (le domaine de définition de  $g$ ) ; puis étudier la limite de  $g$  en 1 .

**2°) a)** Vérifier que :  $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$ .

**b)** En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ .

Interpréter géométriquement ce résultat.

**c)** Dresser le tableau de variations de  $g$ .

**d)** Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique appartenant à  $]0 ; 1[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Donner un encadrement d'ordre 1 de  $\alpha$ .

**3°)** Tracer la courbe  $\mathcal{C}_g$  de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

### **PARTIE C**

Soit  $f : [0 ; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction définie par :  $f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

**1°)** Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0 ; 1[$  et que :  $f'(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in [0 ; 1[$ .

**2°)** Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe  $\mathcal{C}_g$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = \alpha$ .

## BAC S2 2002 2<sup>ème</sup> groupe

### EXERCICE 1

Calculer  $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2x^2 - 1) \cos 3x dx$ .

### EXERCICE 2

1°) Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de  $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

2°) Déterminer et construire  $E_1 = \{ M(z) ; (iz - 2)(\bar{z} - 1) \text{ soit un réel} \}$

3°) Déterminer et construire  $E_2 = \{ M(z) ; \arg[(iz - 2)(\bar{z} - 1)] = \frac{\pi}{2} \}$ .

### EXERCICE 3

Un sac contient douze jetons indiscernables au toucher sur chacun desquels est inscrite une lettre du mot « SENEGALAISES ».

1°) Déterminer la probabilité d'avoir les lettres du mot « SAGESSE » dans chacun des cas suivants :

a) On tire simultanément sept lettres du sac.

b) On tire successivement sept lettres en remettant à chaque fois la lettre tirée dans le sac après l'avoir notée.

2°) Déterminer la probabilité d'avoir dans leur ordre les lettres du mot « SAGESSE », si l'on tire successivement sans remise sept lettres du sac.

### EXERCICE 4

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$ .

1°) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2°) Vérifier que  $e^x + 1 = e^x(1 + e^{-x})$  ; en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**3°)** Montrer que la droite  $D : y = x$  est une asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$ .

**4°)** Montrer que  $f$  est bijective. Calculer  $f^{-1}(0)$  et  $(f^{-1})'(-\ln 2)$ .

**5°)** Construire la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal.

# BAC S2 2002 1<sup>er</sup> groupe

## EXERCICE 1

$\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer que, dans  $\mathbb{C}$ , la somme des racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité est égale à zéro ( $n \geq 2$ )
2. En utilisant les résultats du 1) montrer que  $\cos \frac{\pi}{5}$  est une solution de l'équation  $4x^2 - 2x - 1 = 0$ .
3. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\cos \frac{\pi}{10}$ .

## EXERCICE 2

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences Physiques : SP.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

Note de Math	2	6	10	14	18	Totaux
Note de SP						
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle  $X = (x_i)$  la série statistique des notes de Sciences Physiques et  $Y = (y_i)$  la série statistique des notes de Mathématiques.

1. Déterminer pour chaque  $x_i$  la moyenne  $z_i$  de la série conditionnelle  $y/z_i$ .
2. On considère la série double  $(x_i, z_i)$ 
  - a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points  $M(x_i, z_i)$ .
  - b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série  $X = (x_i)$  et  $Z = (z_i)$ .
  - c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de  $Z$  et  $X$  par la méthode des moindres carrés.

d) Tracer cette droite.

## **PROBLEME**

**A.** On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} + \setminus \{1\}$  par :

$$g(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } x \neq 1 ; g(0) = 0 .$$

1. Montrer que  $g$  est continue à droite en zéro.
2. Etudier les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.  
Dresser le tableau de variation de  $g$ .  
En déduire le signe de  $g(x)$  en fonction de  $x$ .

**B.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} + \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{-x}{\ln x} \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 ; f(0) = 0 .$$

1. Montrer que  $f$  est continue à droite et dérivable à droite au point  $O$ . En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative **C** de  $f$  au point d'abscisse  $0$ .
2. Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Comparer  $f'(x)$  et  $g(x)$ . En déduire les variations de  $f$  et son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente  $D$  à la courbe **C** au point d'abscisse  $e^2$ .
5. Soit  $M$  le point de  $C$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de  $D$  de même abscisse  $x$ . On pose  $\Phi(x) = \overline{NM}$  .

$$\text{Montrer que : } \Phi(x) = f(x) + \frac{x + e^2}{4} .$$

Déduire de A) le tableau de variations de  $\Phi'(x)$  puis le signe de  $\Phi'(x)$  sur  $]1 ; +\infty[$ .

En déduire le signe de  $\Phi(x)$  sur  $]1 ; +\infty[$  et la position de **C** par rapport à  $D$  pour les points d'abscisse  $x > 1$ .

6. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe **C** et la droite  $D$  (unité 2 cm).

**C.** On revient à la fonction  $g$  du A).

On note  $C_g$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

Sans construire  $C_g$ , calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie plane comprise entre la courbe  $C_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives :  $x = e$  et  $x = e^2$ .

## BAC S2 2001 2<sup>ème</sup> groupe

### EXERCICE 1

- 1°) Résoudre l'équation différentielle ( E ) :  $y'' + y = 0$  .  
2°) Déterminer la solution particulière de ( E ) vérifiant  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \sqrt{3}$  .  
3°) Résoudre :  
a) dans  $\mathbb{R}$  :  $f(x) + \sqrt{2} = 0$   
b) dans  $[0 ; 2\pi[$  :  $f(x) + \sqrt{2} = 0$

### EXERCICE 2

- 1°) Factoriser :  $\alpha^2 - 2i\alpha - 1$  .

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$  .

- 2°) On note  $r$  le module de  $\alpha$  et  $\theta$  un de ses arguments. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de ( E ) .

- 3°)  $P$  désigne le plan complexe ; on note  $S_\alpha$  l'application définie sur  $P$  par :

$$S_\alpha : P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que : } z' = i\alpha z + \alpha^2 .$$

Déterminer  $\alpha$  pour que  $S_\alpha$  soit une rotation d'angle  $\frac{5\pi}{6}$  .

### EXERCICE 3

Les relevés de l'intensité ( $x_i$ ) du travail fourni exprimée en kilojoules par minute et la fréquence cardiaque ( $y_i$ ) (nombre de battements par minute) de 8 personnes sont consignés dans le tableau suivant :

$x_i$	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
$y_i$	70	86	90	104	120	128	144	154

- 1°) Représentez le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  .  
2°) Déterminez les moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  , les variances  $V(x)$  et  $V(y)$  de  $x$  et  $y$  . On précisera les formules utilisées.  
3°) Déterminez la droite de régression de  $y$  en  $x$  ; la tracer.

### EXERCICE 4

- 1°) Etablir que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  .

- 2°) Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 7 - 4e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + 3 - x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Etudier la continuité de  $f$  en 0 .  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interpréter le résultat graphiquement.  
c) Etudier les variations de  $f$  .

- 3°)  $\mathcal{C}$  est courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

- a) Ecrire l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $e$  .

**b)** Tracer  $\mathcal{E}$ .

## BAC S2 2001 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

Le plan complexe  $P$  est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$  vers  $\mathbb{C}$  définie par :  $f(z) = \frac{2z - i}{z - 2i}$ .

a) — Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $f(z) = z$ .

Donner les solutions  $z_1$  et  $z_2$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

b) — Calculer  $z_1^4 + z_2^4$ .

1 / Soit  $M(z)$  un point de  $P$ .

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $f(z)$  soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ . Tracer  $(\Gamma)$ .

2 / Montrer que  $|z| = 1$  équivaut à  $|f(z)| = 1$ .

### EXERCICE 2

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

**1°)** Quelle est la probabilité des événements :

A = « les deux nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5 »

B = « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second ».

**2°)** Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes; Quelle est la probabilité pour qu'à l'issue de la 7<sup>ème</sup> partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? au moins une fois ?

### PROBLEME

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x(1 - \ln x)^2 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

où  $\ln x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ , on appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. **a)** - Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  sur son ensemble de définition.

**b)** - Etudier les variations de  $g$ .

c) - Tracer (  $\mathcal{C}$  ).

2. a) Soit  $\alpha$  un réel appartenant à l'intervalle ] 0, e [.

Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire  $\mathcal{A}(\alpha)$  du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (  $\mathcal{C}$  ) et les droites d'équations respectives :

$x = \alpha$  et  $x = e$ .

b) - Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$  .

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (  $\mathcal{C}$  ) et la droite (  $\Delta$  ) :  $y = x$

b) Pour quelles valeurs de  $m$  la droite (  $\Delta_m$  ) :  $y = mx$ , recoupe-t-elle la courbe  $\mathcal{C}$  en deux points  $M_1$  et  $M_2$  autres que  $O$  ?

c) La droite (  $\Delta_m$  ) coupe la droite  $D$  d'équation  $x = e$  en  $P$ .

Montrer que  $OM_1 \times OM_2 = OP^2$ .

4. a) Montrer que la restriction  $h$  de la fonction  $g$  à l'intervalle  $] e ; + \infty [$  admet une réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble  $h^{-1}$  est-elle dérivable?

Calculer  $h(e^2)$ ; en déduire  $(h^{-1})'(e^2)$ .

c) Construire la courbe de  $h^{-1}$  dans le repère  $( O, \vec{i}, \vec{j} )$  .

## BAC S2 2000 Remplacement

### EXERCICE 1

Soit le nombre complexe  $Z = (1 - x) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

**1°)** Calculer le module et un argument de  $Z$  (on discutera selon les valeurs de  $x$ ). donner pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme exponentielle de  $Z$ .

**2°)** Montrer que  $Z^{2004}$  est un réel dont on précisera le signe.

**3°) a)** Montrer que l'équation  $|Z| = 2$  admet deux racines  $Z_1$  et  $Z_2$ .

On notera  $Z_1$  le complexe de plus grande partie réelle et  $Z_2$  l'autre racine.

**b)** Ecrire  $Z_1$  et  $Z_2$  sous forme algébrique.

**c)** Placer les points  $A_1$  et  $A_2$  d'affixes respectives  $Z_1$  et  $Z_2$  dans le plan complexe

muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et vérifier que  $A_2, O, A_1$  sont alignés.

### EXERCICE 2

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de ses bêtes.

**1°)** — Soit  $X$  le nombre de moutons tués.

**a)** Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et sa fonction de répartition.

**b)** Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  et l'écart-type de  $X$ .

**2°)** — On estime qu'un mouton donne environ 20kg de viande et une chèvre 15kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.

On note  $A$  l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et  $B$  l'événement « il y a assez de viande ».

**a)** Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$

**b)** Calculer  $P(B / A)$  ;  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

### PROBLEME

**I** — On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = 1 - x e^{-x}$ .

**1°)** Etudier les variations de  $g$ .

**2°)** En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**II** — On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(-x) & \text{si } x < -1. \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. (unité 2 cm).

**1°) a)** Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Etudier les variations de  $f$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ .

(On utilisera I. 2).

**2°) a)** Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$

en  $+\infty$ .

**b)** Etudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sur  $[-1; +\infty[$ .

**3°)** Montrer qu'il existe un unique point de la courbe  $\mathcal{C}$  dont on précisera les coordonnées, où la tangente (T) est parallèle à la droite  $\mathcal{D}$ .

**4°)** Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ , l'asymptote  $\mathcal{D}$  et la tangente (T), on précisera la tangente ou les demi-tangentes à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $-1$ .

**5°) a)** Montrer que  $f$  est une bijection de  $[-1; +\infty[$  sur un ensemble  $J$  que l'on précisera.

**b)** Construire la courbe  $\mathcal{C}'$  de  $f^{-1}$  sur le même graphique que la courbe  $\mathcal{C}$ .

**III** — Pour  $\lambda \geq -1$ , on note  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq \lambda \\ x + 1 \leq y \leq f(x) \end{array} \right.$$

**a)** Calculer  $A(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties.

**b)** Montrer que  $A(\lambda)$  admet une limite finie lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

Calculer et interpréter graphiquement cette limite.

## BAC S2 2000 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

On considère les points  $A_1, A_2, A_3$  d'affixes respectives :

$$Z_1 = 1 ; Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} ; Z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

**1°) a)** Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes  $Z_2 - Z_1$  et  $Z_3 - Z_1$

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de  $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$ .

En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

**2°)** Soit  $S$  la similitude plane directe transformant  $A_2$  en  $A_3$  et  $A_1$  en  $A_1$ .

**a)** Préciser les éléments caractéristiques de  $S$ .

**b)** On désigne d'affixe  $Z'$ , l'image par  $S$  du point  $M$  d'affixe  $Z$ . Exprimer  $Z'$  en fonction de  $Z$  ; en déduire l'image, par  $S$  du point  $B$  d'affixe  $1 - 4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

### EXERCICE 2

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note  $p_i$   $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  la probabilité de tirer le jeton numéroté  $i$ . On suppose que les nombres  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ , sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison  $\frac{1}{30}$ .

**1°) a)** Montrer que  $p_1 = \frac{1}{12}$ .

**b)** En déduire  $p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ .

**2°)** On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

**a)** Déterminer la loi de la probabilité de  $X$ .

**b)** Déterminer l'espérance mathématique de  $X$  puis son écart-type.

**3°)** Un joueur tire simultanément 2 jetons et note  $S$  la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

**a)** Déterminer la loi de probabilité de  $S$ .

**b)** On gagne à ce jeu lorsque  $S \geq 4$ . Déterminer la probabilité de gagner.

## **PROBLEME**

Soit la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm)

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  et  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ .

### **Partie A**

**1°) a)** Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

**b)** Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

**2°) a)** Montrer que pour  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$ .

**b)** Etudier les variations de  $f'$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

En déduire que pour  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ .

**c)** Donner le tableau de variation de  $f$ .

**3°) a)** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$  (on pourra poser  $u = \frac{1}{x}$ ).

**b)** Montrer que  $(D) : y = x + 1$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $-\infty$ . On admettra que  $(\mathcal{C})$  est en dessous de  $(D)$ .

**4°) a)** Construire  $(\mathcal{C})$ , on précisera les coordonnées de  $I$ , point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$  pour  $x > 0$

**b)** Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .

### **Partie B**

**1°)** Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+ : \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .

**2°)** En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction  $F$  telle que :

$$F(x) = \frac{(x^2 - 1) \ln(1 + x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x) \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

**3°)** Calculer l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par  $(\Delta)$ ,  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = e - 1$ .

### Partie C

**1°) a)** Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque notée  $f^{-1}$ .

**b)**  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de  $f^{-1}$ .

**2°)** Construire  $(\mathcal{C}')$  courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**3°)** Dédurre du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tels que : } \begin{cases} 0 \leq x \leq e - 1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) . \end{cases}$$

# BAC S2 1999 Remplacement ENONCE

## EXERCICE 1

On considère le plan complexe  $\mathcal{S}$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**1°)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $-z^3 + 6z - 20i = 0$  (E)  
sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure  $a$ .

**2°)** Notons  $b$  et  $c$  les autres solutions de (E),  $b$  ayant la partie réelle positive et soient  $A, B, C$  les points de  $\mathcal{S}$  d'affixes respectives  $a, b, c$ . Déterminer le module et un argument de  $\frac{b-a}{c-a}$ . En déduire la nature du triangle ABC.

**3°)** Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$  rad ; et  $f$  l'application qui à tout point  $M$  de  $\mathcal{S}$  d'affixe  $z \neq i - \sqrt{3}$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} + i}$$

**a)** Donner l'écriture complexe de  $r$  puis l'affixe du point  $A' = r(A)$ .

**b)** Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{S}$  dont les images par  $f$  ont pour affixe un réel négatif. On notera  $E$  cet ensemble.

**c)** Déterminer l'ensemble  $F$  des points  $M$  de  $\mathcal{S}$  dont les images par  $f$  appartiennent au cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

## EXERCICE 2

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). on note  $X$  la quantité, en tonnes de matières premières ;  $Y$  le chiffre d'affaires en milliers de francs. Dans tout l'exercice on pourra donner directement les résultats fournis par la calculatrice. Le relevé des mopis précédents est le suivant :

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

**1°) a)** Calculer les coefficients de corrélation linéaire  $r_1$  entre  $X$  et  $Y$  et  $r_2$  entre  $X$  et  $Z$ .

**b)** Est-ce un ajustement entre  $Y$  et  $X$  ou entre  $Z$  et  $X$  qui permettra la meilleure estimation de  $X$  ?

**2°)** Déterminer une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$  et en déduire une estimation du besoin en matières premières pour  $Y = 39$ .

## PROBLEME

### Partie A

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in ]-\infty ; 0[ . \\ f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x \in [0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ . \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique: 2 cm).

**1°)** Etudier la continuité de  $f$  en 0.

**2°) a)** Montrer que pour tout  $x \in ]0 ; 1[$ ,  $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

**b)** Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

**c)** En déduire que  $\mathcal{C}$  admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.

**3°)** Etudier les variations de  $f$ .

**4°)** Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

## **Partie B**

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]1 ; +\infty[$ .

**1°)** Montrer que  $g$  est une bijection de  $]1 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.  
On notera  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .

**2°)** Montrer que l'équation  $g(x) = -e$  admet une solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  (on ne demande pas de calculer  $\alpha$ ).

**3°)** Montrer que pour tout  $x \in J$ ,  $g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$ .

**4°)** Tracer dans un nouveau repère orthonormal  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  les représentations graphiques des bijections  $g$  et  $g^{-1}$  (on notera ces dernières  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ ).

on prendra 2cm pour unité du repère, on indiquera en annexe la nature et l'équation de chacune des asymptotes à  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ .

**5°)** Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $\mathcal{A}$  de l'ensemble des points  $M \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)$  défini par :

$$\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

## BAC S2 1999 2<sup>ème</sup> groupe ENONCE

### EXERCICE 1

Soit  $a \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $f_a$  l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point  $M$

d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = (-1 + i \tan a) z - i \tan a + 2$$

- 1°) Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $-1 + i \tan a$ .
- 2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f_a$ .
- 3°) Soit  $h_a$  l'homothétie de centre le point  $\Omega$  d'affixe 1 et de rapport  $\frac{1}{\cos a}$ .

Donner une écriture complexe de la rotation  $r_a$  telle que :  $f_a = r_a \circ h_a$ .

### EXERCICE 2

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient 3 boules noires et 1 blanche. L'urne  $U_2$  contient 1 boules noires et 2 blanches.

On jette un dé cubique, parfaitement équilibré. Si le dé donne 6, on tire au hasard une boule de l'urne  $U_2$ , sinon on tire au hasard une boule de l'urne  $U_1$ .

On désigne par :

S l'événement : « on obtient 6 avec le dé ».

N l'événement : « on tire une boule noire ».

1°) Calculer les probabilités des événements  $S \cap N$  et  $\overline{S} \cap N$ .

2°) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

3°) Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 avec le dé, sachant que l'on a tiré une boule blanche.

### EXERCICE 3

Soit la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_n = \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right)$ .

1°) a) Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Justifier que  $(V_n)$ , définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \ln U_n$  existe et est arithmétique.

2°) On pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  et  $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ .

a) Exprimer  $S_n$  et  $P_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer les limites à l'infini de  $S_n$  et  $P_n$ .

### EXERCICE 4

On considère la fonction  $f$  de  $[0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{2x} + 4x - 2$ .

1°) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

2°) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que :

$$0,1 < \alpha < 0,2.$$

## BAC S2 1999 1<sup>er</sup> groupe

### EXERCICE 1

L'étude du poids  $P$  de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge  $x$  a conduit au tableau suivant :

X (mois)	1	2	3	4	5
P (mg)	7	13	25	47	88

**1°)** On pose  $y = \ln P$  ou  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

a) Calculer les différentes valeurs prises par  $y$  à  $10^{-5}$  près .

b) Tracer le nuage de points représentant les couples  $(X, Y)$  dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm) : y placer le barycentre  $G$  du nuage.

**2°)** Déterminer une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$  .

**3°)** Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

### EXERCICE 2

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes on considère l'équation

$$(E) z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$$

**1°)** a) Vérifier que  $(E)$  admet une solution réelle .

b) Achever la résolution de l'équation  $(E)$

**2°)** Dans le plan complexe on désigne par  $A, B, C$  les points d'affixes respectifs

$$z_A = -1 ; z_B = -2 + i ; z_C = i.$$

a) Déterminer le module et argument de  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$  .

b) En déduire la nature du triangle  $ABC$  .

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant  $A$  et transforme  $B$  en  $C$  .

## **PROBLEME**

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \quad \text{si } x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0[$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{si } x \in [0 ; +\infty[$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ .

### **Partie A**

**1°)** Quel est le domaine de définition de  $f$ . Calculer  $f(-2)$  et  $f(3)$ .

**2°)** Montrer que la fonction  $f$  est continue en zéro.

**3°) a)** Etablir que la dérivée  $f'$  de  $f$  a pour expression

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \text{si } x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0[$$

$$f'(x) = x e^{-x} (2-x) \quad \text{si } x \in [0 ; +\infty[$$

**b)** La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse.

**c)** Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

**4°)** Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une racine unique  $\alpha$  comprise entre  $-1,6$  et  $1,5$ .

**5°) a)** Justifier que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

**b)** Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(D)$  dans  $] -\infty ; 0[ \setminus \{-1\}$ .

**6°)** Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  en représentant sur la même figure les asymptotes ; les demi-tangentes en  $O$  et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

### **Partie B**

**1°)** Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $[0,2]$ .

Montrer que  $g$  définit une bijection de  $[0 ; 2]$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

**2°)** On note  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .

**a)** Résoudre l'équation  $g^{-1}(x) = 1$ .

**b)** Montrer que  $g^{-1} \left( \frac{1}{e} \right) = e$ .

**3°)** On appelle  $(\mathcal{C}')$  la courbe représentative de  $g^{-1}$ .

Tracer  $(\mathcal{C}')$  en utilisant la courbe  $C$  et une transformation à préciser ( on placera sur la courbe  $(\mathcal{C}')$  le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse  $\frac{1}{e}$  ).

### **Partie C**

$\lambda$  étant un réel strictement positif , on pose  $I(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx$ .

**1°) a)** Interpréter graphiquement  $I(\lambda)$ .

**b)** En procédant à une intégration par parties , calculer  $I(\lambda)$ .

**2°)** Quelle est la limite de  $I(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $-\infty$ .

**3°)** On pose  $\lambda = 2$ .

**a)** Calculer  $I(2)$ .

**b)** En déduire la valeur en  $\text{cm}^2$  de l'aire de la partie limitée par  $C'$  et les droites d'équation  $y = 0$  ;  $x = 0$  et  $x = \frac{4}{e^2}$ .

# BAC S2 1998 REMPLACEMENT ENONCE

## EXERCICE 1

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue  $z$  telle que :  $(E) iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$ .

**a)** Montrer que cette équation possède une solution réelle notée  $z_1$ . Déterminer l'autre solution  $z_2$  de (E).

**b)** Dans le plan complexe muni du repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , on note  $M_1$  le point d'affixe  $z_1$  et  $M_2$  le point d'affixe  $z_2$ .

Déterminer l'affixe du point C de l'axe  $(O, \vec{e}_1)$  équidistant de  $M_1$  et  $M_2$ .

**c)** Soit la rotation  $R_1$  de centre C telle que  $R_1(M_1) = M_2$ .

**α)** Déterminer une mesure de l'angle de la rotation  $R_1$ .

**β)** Déterminer l'affixe du point O' image de O par  $R_1$ .

**d)** Soit la rotation  $R_2$  de centre O et d'angle orienté  $\theta$  tel que  $\text{Mes } \theta = \frac{\pi}{2}$  rad.

**α)** Quelle est la nature de la composée  $R_2 \circ R_1$ ? Justifier votre réponse.

**β)** Soit B d'affixe  $3i$ . Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle BOC par  $R_2 \circ R_1$ . Justifier votre réponse.

## EXERCICE 2

Soit la fonction  $f$  telle que 
$$\begin{cases} f(x) = x \ln |x| & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

**1°) a)** Préciser  $D_f$  et étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.

**b)** Montrer que  $f$  est impaire, puis étudier  $f$  sur  $[0; +\infty[$  en précisant les limites éventuelles puis son sens de variation.

**2°) a)** A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale  $I(\alpha)$

telle que  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$  avec  $\alpha \in ]0; 1]$ .

**b)** En déduire  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$ .

**3°)** Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C}_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 1$  (en unités d'aires U.A.).

## EXERCICE 3

Soit  $a$  un réel non nul et la suite  $(U_n)$  :  $U_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = a U_{n-1} + 2$

**1°) On suppose  $a = 1$ .**

**a)** Quelle est la nature de la suite  $(U_n)$ ?

**b)** Calculer le centième terme de cette suite.

**c)** Déterminer la valeur de  $S = 1 + 3 + 5 + \dots + U_{99}$ .

**2°) On suppose  $a = 3$  et on donne la suite  $(V_n)$  telle que**

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n + 1.$$

- a)** Montrez que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.  
**b)** Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  $(U_n)$  est-elle convergente ? Pourquoi ?

**3°)** On ne donne pas  $a$  mais on donne la suite  $(\omega_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = U_n - \frac{2}{1-a}; a \neq 1.$$

- a)** Montrer que  $(\omega_n)$  est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.  
**b)** Pour quelles valeurs de  $a$   $(U_n)$  sera-t-elle convergente ? donner alors sa limite.

## **EXERCICE 4**

Dans un pays A, on a évalué le nombre de personnes travaillant dans l'agriculture en fonction de l'année.

X année	1954	1962	1968	1975	1982	1990
Y nombre d'actifs agricoles en milliers	3 984	3 011	2 460	1 652	1 448	982

On note Z le rang de l'année  $\begin{cases} 1954 \text{ a pour rang } Z = 0 \\ 1990 \text{ a pour rang } Z = 36 \end{cases}$

- 1°)** Construire le nuage de points associé à cette série statistique  $(Z, Y)$ .  
**2°)** Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  de cette série. Peut-on envisager une forte corrélation linéaire entre Z et Y ?  
**3°)** Déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $z$ .

# CORRIGES

## BAC S2 2009 1<sup>er</sup> groupe. SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) On sait, d'après les formules du cours que :  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y}$  ;  $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$  ;  $a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$ .

D'où :  $aa' = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \times \sigma_y^2} = r^2$ .

2°) a) L'équation de la droite de régression de Y en X s'écrit :  $x = \frac{3,5}{9} + \frac{24}{9}$ . Donc, pour les deux droites données, on a :  $a = 2,4$  et  $a' = \frac{3,5}{9}$ , d'où, d'après la question 1°,

$$aa' = r^2 = \frac{2,4 \times 3,5}{9} = \frac{14}{15} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{14}{15}} \approx 0,966.$$

N.B. L'hypothèse que la covariance  $\sigma_{xy}$  est positive permet d'assurer que  $r$  est également positif, car d'après la formule  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y}$ ,  $r$  et  $\sigma_{xy}$  ont même signe, puisque les écarts-types

$\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont par définition positifs.

b)  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les coordonnées du point moyen G du nuage de points associé à la série double (X,Y). Or, on sait que les deux droites de régression passent par G.  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont donc les

solutions du système :  $\begin{cases} 2,4x - y = 0 \\ 3,5y - 9x + 24 = 0 \end{cases}$ , dont la résolution (élémentaire et laissée au lecteur), conduit à :  $\begin{cases} \bar{x} = 40 \\ \bar{y} = 40 \end{cases}$ .

### EXERCICE 2

Notons dès le départ que les deux tirages successifs sont indépendants. La probabilité de tout résultat (qui est un couple de deux nombres (p, q) choisis parmi 1, e et  $\frac{1}{e}$ ) est donc le produit des probabilités d'obtenir chacun de ces deux nombres lors d'un seul tirage. Or, vu la composition de l'urne, les probabilités respectives d'obtenir 1, e et  $\frac{1}{e}$  sont  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$  et  $\frac{1}{2}$ .

1°) •  $M \in (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \ln y = 0 \Leftrightarrow y = 1$ . Donc réaliser A consiste à tirer un couple de jetons de la forme (X, 1), où X est un résultat quelconque. Ainsi  $p(A) = 1 \times \frac{1}{3} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{3}$ .

• De même, la réalisation de B correspond aux couples de résultats de la forme (1, X), où X est un résultat quelconque, car  $M \in (O, \vec{j}) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

D'où  $p(B) = \frac{1}{3} \times 1$ , soit  $p(B) = \frac{1}{3}$ .

• L'événement C est constitué du couple (1,1) uniquement, car M appartient aux deux axes si et seulement si  $\ln x = \ln y = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$ . Donc  $p(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \Rightarrow p(C) = \frac{1}{9}$ . On peut remarquer que C n'est autre l'événement  $A \cap B$ .

• D est l'événement  $\overline{A \cup B}$ . Or,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

On en déduit:  $p(D) = 1 - \frac{5}{9} \Rightarrow p(D) = \frac{4}{9}$ .

• E est réalisé si et seulement si  $(\vec{i}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln x = \ln y$  et  $\ln x > 0, \ln y > 0$ . Cela signifie que M appartient à la demi-droite portée par la première bissectrice dont les points ont des coordonnées strictement positives. Cela correspond aux couples de la forme (e,e).

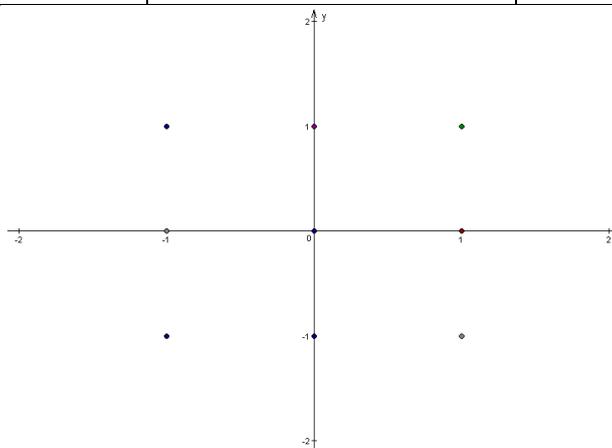
D'où  $p(E) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ .

• F est réalisé si et seulement si  $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$ . C'est vérifié pour les couples de résultats  $(1, e), (1, \frac{1}{e}), (e, 1)$  et  $(\frac{1}{e}, 1)$ .

Card (F) =  $(4 \times 2) + (4 \times 6) + (2 \times 4) + (6 \times 4) = 64$ . D'où  $p(F) = \frac{64}{12^2} = \frac{4}{9}$ .

2°) Examinons à l'aide d'un tableau les différentes positions du point M dans le plan complexe.

Résultat du premier lancer	Résultat du premier lancer	Point M correspondant
1	1	M(0,0)
1	e	M(0,1)
1	$\frac{1}{e}$	M(0, - 1)
e	1	M(1,0)
e	e	M(1,1)
e	$\frac{1}{e}$	M(1, - 1)
$\frac{1}{e}$	1	M(- 1,0)
$\frac{1}{e}$	e	M(- 1,1)
$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	M(- 1,- 1)



On voit que la distance OM peut être, selon les cas égale à 0, 1 ou  $\sqrt{2}$ .

$(X=0)$  correspond au couple  $(1,1)$ :  $p(X) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .

$(X = 1)$  correspond aux couples  $(1,e)$ ,  $(1, \frac{1}{e})$ ,  $(e,1)$ ,  $(\frac{1}{e}, 1)$  :

$$p(X = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

$(X = \sqrt{2})$  correspond aux autres cas :  $p(X = \sqrt{2}) = \frac{4}{9}$ .

La loi de probabilité de  $X$  en découle :

X	0	1	$\sqrt{2}$
$p_i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

La fonction de répartition est définie par :  $F(x) = p(X \leq x)$ .

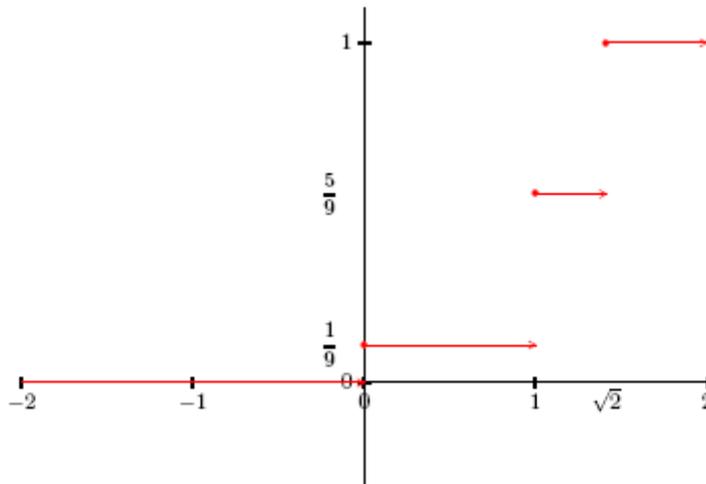
— Si  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $F(x) = 0$

— Si  $x \in [0; 1[$ ,  $F(x) = p(X = 0) = \frac{1}{9}$

— Si  $x \in [1; \sqrt{2}[$ ,  $F(x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{5}{9}$

— Si  $x \in [1; +\infty[$ ,  $F(x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = \sqrt{2}) = 1$ .

Sa représentation graphique est :











## BAC S2 2008 2<sup>e</sup> groupe. SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) Par réduction au même dénominateur, on obtient :

$$\forall x \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[ : \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x) + bx}{x(1-x)} = \frac{(b-a)x + a}{x(1-x)}.$$

Cette dernière fraction est égale à  $\frac{1}{x(1-x)}$  si son numérateur est égal à 1, d'où par

identification (égalité de deux polynômes) :  $\begin{cases} b-a=0 \\ a=1 \end{cases}$  soit :  **$a = b = 1$** .

2°) On pose  $u(x) = \ln x$  et  $v'(x) = (1-x)^{-2}$ , d'où :  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v(x) = \frac{1}{1-x}$ .

On obtient ainsi, d'après la formule d'intégration par parties :

$$J = \left[ \frac{\ln x}{1-x} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{x(1-x)} dx = \left[ \frac{\ln x}{1-x} \right]_2^3 - \left[ \ln|x| + \ln|1-x| \right]_2^3.$$

$$\text{Soit : } J = \frac{\ln 3}{-2} + \ln 2 - \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 = -\frac{3}{2} \ln 3 + \ln 2 = \ln \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2}{3}.$$

Enfin, on obtient :  **$J = \ln \frac{2}{3\sqrt{3}}$** .

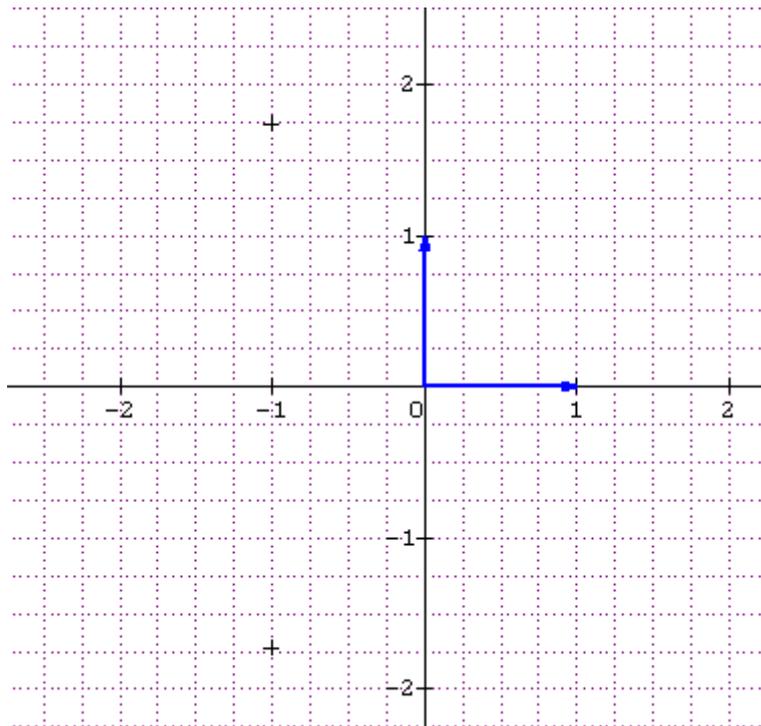
### EXERCICE 2

1°) a) Cette équation a pour discriminant réduit :  $\Delta' = 1 - 4 = -3$ . D'où les solutions :

$$z_1 = -1 - \sqrt{3}i = \beta \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i = \alpha.$$

b) On obtient  $\alpha = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$  et :

$$\beta = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$



$$2^\circ) \frac{\alpha^3}{\beta^2} = \frac{\left(2e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^3}{\left(2e^{\frac{i4\pi}{3}}\right)^2} = \frac{8e^{i2\pi}}{4e^{\frac{i2\pi}{3}}} = 2e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{i4\pi}{3}} = \beta.$$

On en déduit immédiatement que :  $\alpha^3 = \beta^3$ .

$$2^\circ) \beta^{24} = \left(2e^{\frac{i4\pi}{3}}\right)^{24} = 2^{24} e^{i32\pi} = 2^{24} \cdot \beta^{24} \text{ est un nombre réel.}$$

### EXERCICE 3

1°) a) D'après le cours, les solutions sont les fonctions de la forme  $y = K e^{-2x}$ .

b)  $f(0) = 1 \Rightarrow K e^{-2 \times 0} = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y = e^{-2x}$ .

La solution qui vérifie la condition donnée est donc la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = e^{-2x}$ .

$$2^\circ) \int_n^{n+1} e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_n^{n+1} = -\frac{1}{2} (e^{-2n-2} - e^{-2n}) = \frac{1}{2} e^{-2n} (1 - e^{-2}).$$

3°) a) On obtient, en remplaçant  $n$  successivement par 0, 1 et 2 :

$$U_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}); \quad U_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} (e^{-2} - e^{-4}) \text{ et :}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-4} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2} (e^{-4} - e^{-6}).$$

b) On a pour tout  $n$  entier naturel,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{-2n-2}}{e^{-2n}} = e^{-2} \Rightarrow (U_n)$  est une suite géométrique de raison  $e^{-2}$  (car le quotient de deux termes consécutifs de la suite est une constante indépendante de  $n$ ).

c) Rappelons que la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule :  $S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$ . On obtient ainsi :

$$U_0 + U_1 + \dots + U_9 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \frac{1 - e^{-20}}{1 - e^{-2}}, \text{ soit : } U_0 + U_1 + \dots + U_9 = \frac{1}{2} (1 - e^{-20})$$

### EXERCICE 3

Désignons par  $R$  l'événement : « la grenouille prélevée est une rainette », par  $G$  l'événement : « la grenouille prélevée est malade », par  $V$  l'événement : « la grenouille prélevée est verte ».

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$p(R) = 0,3; \quad p(V) = 0,7; \quad p(M | R) = 0,1; \quad p(M | V) = 0,2.$$

$A$  est l'événement  $R \cap M$ . Donc :

$$p(A) = p(R \cap M) = p(M | R) \times p(R) = 0,1 \times 0,3 \Rightarrow p(A) = 0,03.$$

$B$  est l'événement  $\overline{R \cap M}$ . Donc :

$$p(B) = p(\overline{R \cap M}) = 1 - p(R \cap M) = 1 - p(A) = 1 - 0,03 \Rightarrow p(B) = 0,97.$$

$C$  est l'événement  $\overline{M}$ . Donc :  $p(C) = 1 - p(M)$ .

Or,  $p(M) = p(M | V) \times p(V) + p(M | R) \times p(R)$  (d'après la formule des probabilités totales),

Soit  $p(M) = 0,2 \times 0,7 + 0,1 \times 0,3 = 0,14 + 0,03 = 0,17 \Rightarrow \mathbf{p(C) = 0,83}$ .

D est l'événement  $V \cap \overline{M}$ . Donc :

$$p(D) = p(V \cap \overline{M}) = p(\overline{M} | V) \times p(V) = [1 - p(M | V)] \times p(V) = 0,8 \times 0,7.$$

D'où :  $\mathbf{p(D) = 0,56}$ .

E est l'événement  $\overline{V}$ . Donc  $p(E) = 1 - p(V) = 1 - 0,7$ , soit  $\mathbf{p(E) = 0,3}$ .

## BAC S2 2008 1<sup>er</sup> groupe (2<sup>ème</sup> sujet) SOLUTION

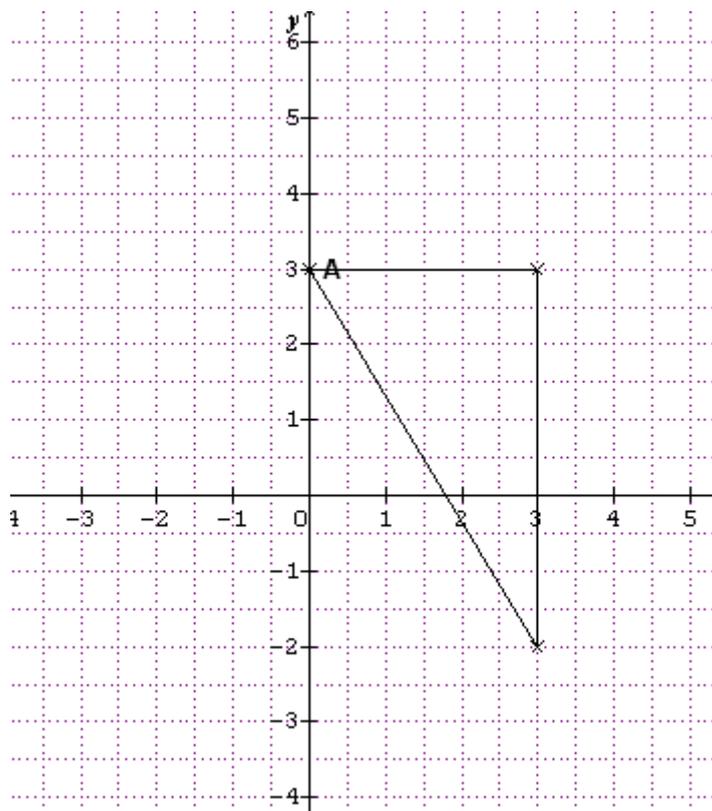
*Nous proposons un corrigé relativement succinct de cette épreuve.*

### EXERCICE 1

1°) a) On cherche a priori la solution imaginaire pure sous la forme  $z_0 = ib$  ( $b \in \mathbb{R}$ ), expression qu'on reporte dans l'équation. En écrivant que les parties réelle et imaginaire sont nulles, on obtient le système :  $\begin{cases} -b^3 + 4b^2 + 12b - 45 = 0 \\ 6b^2 - 21b + 9 = 0 \end{cases}$ . Après calculs, on trouve  $z_0 = 3i$ .

b) Le premier membre de l'équation s'écrit :  $P(z) = (z - 3i) [z^2 - (6 + i)z + 15 + 3i]$  On trouve  $z_1 = 3 + 3i$  et  $z_2 = 3 - 2i$ .

2°) a)



b)  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -\frac{3}{5}i$ . ABC est un **triangle rectangle en B**.

3°) a) f est de la forme  $z \mapsto az + b$ . On a  $f(B) = B$  et  $f(A) = C$ . D'après a) on a :

$z_B - z_A = -\frac{3}{5}i(z_B - z_C)$ . Donc  $a = \frac{5}{3}i$ . En outre  $\frac{b}{1 - a} = z_B = 3 + i \Rightarrow b = 8 - 2i$ .

Ainsi **f :  $z \mapsto \frac{5}{3}iz + 8 - 2i$** .

b) f est la similitude directe de rapport  $\frac{5}{3}$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre **B(3, 3)**.

### EXERCICE 2

1°) a) En dérivant, on trouve  $h' = [(b - a) \cos x - (a - b) \sin x]e^{-x}$ , d'où :

$h' + h = (b \cos x - a \sin x)e^{-x}$ . On veut que  $h' + h = e^{-x} \cos x$ , d'où **a = 0 et b = 1**.

Ainsi  $h(x) = \sin x e^{-x}$ .

**b)**  $f$  est solution de (E)  $\Rightarrow f' + f = e^{-x} \cos x$ . Or, on a aussi  $h' + h = e^{-x} \cos x$ , d'où par différence,  $(f - h)' + (f - h) = 0 \Rightarrow (f - h)$  est solution de  $(E_0)$ .  
Réciproquement,  $(f - h)$  est solution de  $(E_0) \Rightarrow (f - h)' + (f - h) = 0 \Rightarrow f' + f = h' + h = e^{-x} \cos x \Rightarrow f$  est solution de (E).

**c)** Les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions  $y$  de la forme  $y = Ke^{-x}$  ( $K \in \mathbb{R}$ ).

**d)** Les solutions de (E) sont les fonctions  $y$  de la forme  $y = Ke^{-x} + \sin x e^{-x}$ , car toute solution de (E) est d'après b), la somme de  $h$  et d'une solution de  $(E_0)$ . On peut écrire,

$$y = (K + \sin x)e^{-x}.$$

**e)**  $g(0) = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow y = \sin x e^{-x}$ .

**2°) a)**  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ .

**b)**  $\ell'(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x} = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) e^{-x}$ .

Posons  $u = x + \frac{\pi}{4}$ .  $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$ . Or dans cet intervalle (faire un schéma du cercle trigonométrique), on a :

$\cos u > 0 \Leftrightarrow u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$ . On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$2\pi$
f'(x)		+	-	+
f	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5\pi}{4}}$	0

**c)** On intègre une première fois par parties en posant :

$$u(x) = e^{-x} \Rightarrow u'(x) = -e^{-x} \text{ et } v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x.$$

$$\text{On a alors } I = [-e^{-x} \cos x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx.$$

Désignons par  $J$  cette dernière intégrale  $\left(\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx\right)$  et intégrons une seconde fois par parties en posant :

$$u(x) = e^{-x} \Rightarrow u'(x) = -e^{-x} \text{ et } v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x.$$

$$\text{On a alors } J = [e^{-x} \sin x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx. \text{ On reconnaît } I \text{ dans cette dernière intégrale.}$$

Enfinement  $I = [-e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x]_0^{2\pi} - I$ . On en déduit que :

$$2I = [-e^{-x}(\cos x + \sin x)]_0^{2\pi} = -e^{-2\pi} + 1 \Rightarrow I = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}.$$

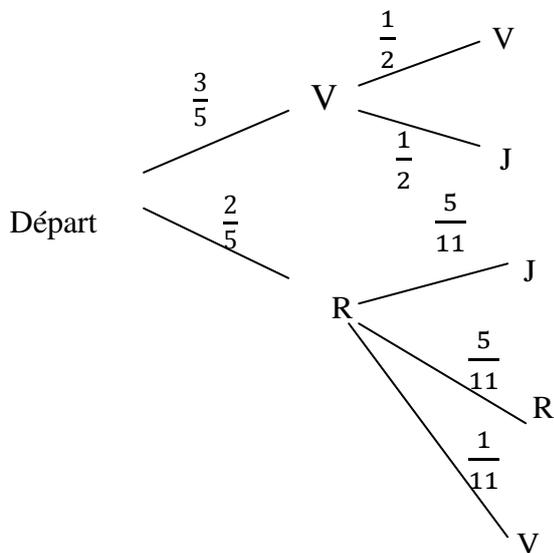
### EXERCICE 3

A) **1°)** Si la première boule tirée est verte, on la met dans  $U_2$ . Dans ce cas,  $U_2$  comporte

$$\text{maintenant 5 V et 5J. on a par conséquent: } p(V_2|V_1) = \frac{5}{10} \Rightarrow p(V_2|V_1) = \frac{1}{2}.$$

**2°)** De même  $p(V_2|R_1) = \frac{1}{11}$ .

3°) Dressons un arbre pondéré de la situation.



D'après la formule des probabilités totales,  $p(V_2) = p(V_2|V_1) p(V_1) + p(V_2|R_1) p(R_1)$ ,  
 Soit  $p(V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{11} \times \frac{2}{5} \Rightarrow p(V_2) = \frac{37}{110}$ .

4°) De manière analogue,  $p(J_2) = p(J_2|V_1) p(V_1) + p(J_2|R_1) p(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{11} \times \frac{2}{5}$ .  
 On trouve  $p(J_2) = \frac{53}{110}$ .

5°) De manière analogue à la question 3°, on a :  
 $p(R_2) = p(R_2|V_1) p(V_1) + p(R_2|R_1) p(R_1) = 0 + \frac{5}{11} \times \frac{2}{5}$ . On trouve  $p(R_2) = \frac{2}{11}$ .

B) 1°) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

X	1000	500	- 500
p(X)	$\frac{37}{110}$	$\frac{53}{110}$	$\frac{2}{11}$

2°)  $E(X) = \sum x_i p_i = \left(1000 \times \frac{37}{110}\right) + \left(500 \times \frac{53}{110}\right) - \left(500 \times \frac{2}{11}\right) \Rightarrow E(X) = \frac{5350}{11}$ .

C) 1°) On a affaire à un schéma de Bernoulli, la probabilité du succès étant  $p(E) = \frac{37}{110}$  et le nombre d'épreuves étant 15.

La probabilité d'avoir exactement 8 succès est :  $P_8 = C_{15}^8 \left(\frac{37}{110}\right)^8 \left(\frac{73}{110}\right)^7$ .

2°) C'est l'événement :  $\underbrace{SSSSSSSS}_{8 \text{ fois}} \underbrace{EEEEEEE}_{7 \text{ fois}}$  (8 succès consécutifs suivis de 7 échecs

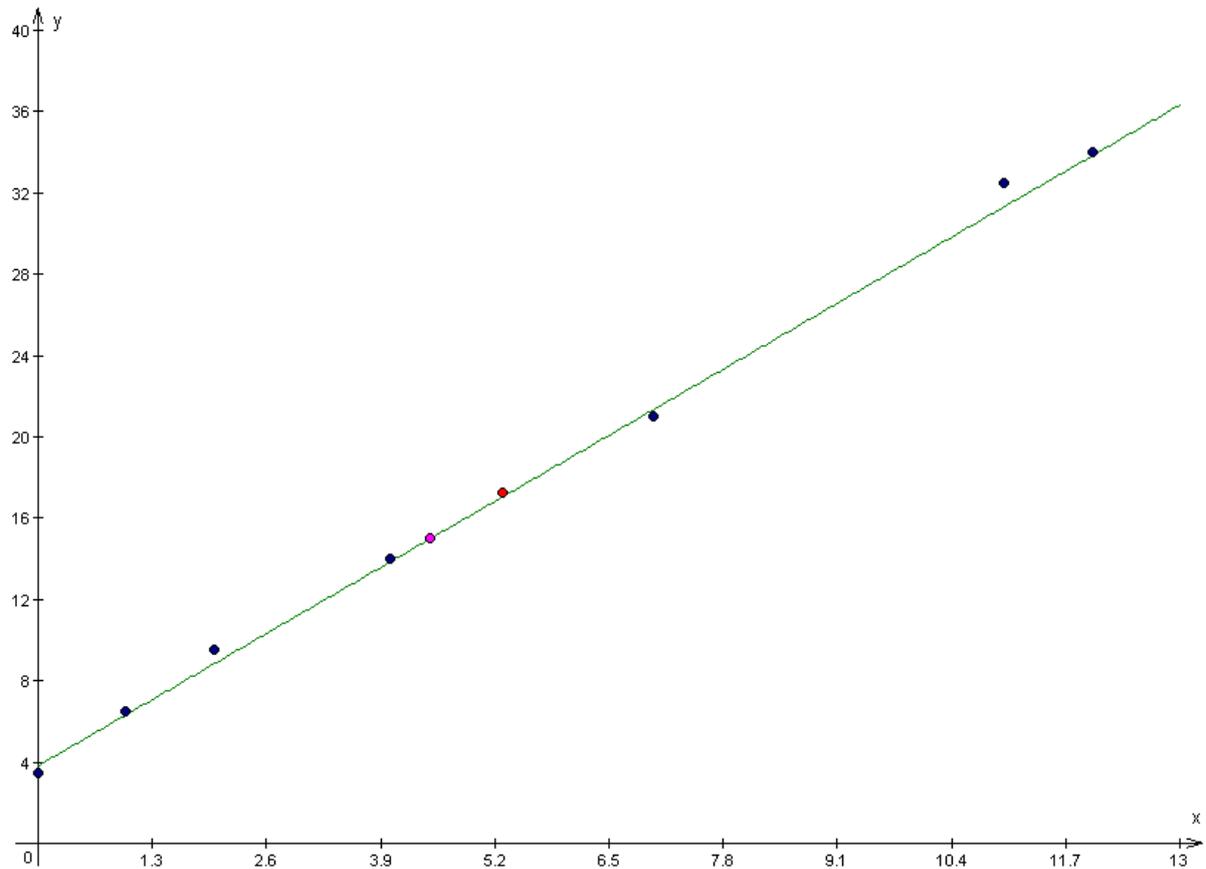
consécutifs). Sa probabilité est :  $p(S)^8 \times p(E)^7 = \left(\frac{37}{110}\right)^8 \left(\frac{73}{110}\right)^7 \approx 9,3 \cdot 10^{-6}$ .

3°) L'événement contraire est :  $p_0 = C_{15}^0 \left(\frac{37}{110}\right)^0 \left(\frac{73}{110}\right)^{15}$ . La probabilité cherchée est donc :

$$p = 1 - p_0 = 1 - \left(\frac{73}{110}\right)^{15} \simeq \mathbf{0,997}.$$

### EXERCICE 4

1°)



2°) G a pour coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$  avec  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i \simeq \mathbf{5,28}$  et  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i \simeq 17,28$ .

3°) a)  $\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} \simeq 50,63$ .

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum x_i^2 - \bar{x}^2} \simeq 4,46. \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum y_i^2 - \bar{y}^2} \simeq 11,39.$$

Le coefficient de corrélation linéaire est donné par la formule  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \simeq \mathbf{0,99}$ .

b)  $r$  est très proche de 1, donc on a une très bonne corrélation.

4°)  $D_{y/x}$  a pour équation :  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$  avec  $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ .

Après calculs, on trouve qu'une équation de  $D_{y/x}$  est  $\mathbf{y = 2,5x - 4,46}$ .

Pour que  $y$  soit supérieur à 15, il faut que  $x$  soit supérieur à 4,46, ce que confirme le calcul.

**BAC S2 2008 1<sup>er</sup> groupe (1<sup>er</sup> sujet) SOLUTION**

**EXERCICE 1**

1°) On a en remplaçant n par 2, puis par 3 dans l'expression de  $z_{n+1}$  fournie par l'énoncé :  
 $z_2 = (1 - a) z_1 + a z_0 = (2 + i) i = -1 + 2i$ .

Et  $z_3 = (1 - a) z_2 + a z_1 = (2 + i)(-1 + 2i) + (-1 - i) i = -2 + 4i - 1 - 2 - i + 1$

Soit  $z_3 = -3 + 2i$ .

2°) a)  $U_0 = z_1 - z_0 = i$ ;  $u_1 = z_2 - z_1 = -1 + i$ .

b) D'après la relation  $z_{n+1} = (1 - a)z_n + az_{n-1}$ , on a :

$z_{n+1} - z_n = -az_n + az_{n-1} = -a(z_n - z_{n-1})$ , soit  $U_n = -a U_{n-1}$ . De plus, on a :

$(1 + i) i = -1 + i$ , soit  $-a U_0 = U_1$ . On en conclut que, pour tout n de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$U_{n+1} = -a U_n.$$

Il en résulte que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $(-a)$  et de premier terme  $u_0 = 1$ .

c) D'après les formules relatives au terme général d'une suite géométrique :

$$u_n = q^n u_0 = (-a)^n u_0, \text{ soit } \mathbf{u_n = (-a)^n i.}$$

3°) On a successivement les égalités :

$$\begin{aligned} u_0 &= z_1 - z_0 \\ u_1 &= z_2 - z_1 \\ u_2 &= z_3 - z_2 \\ u_3 &= z_4 - z_3 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ u_{n-2} &= z_{n-1} - z_{n-2} \\ u_{n-1} &= z_n - z_{n-1} \end{aligned}$$

qui, par addition membre à membre, donnent :  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = z_n$ . Par ailleurs,  $S_n$  est la somme des n premiers termes de la suite géométrique  $(U_n)$ , donc

$$S_n = z_n = i \left[ \frac{(1 - (-a))^n}{1 + a} \right], \text{ par application de la formule } S = \frac{P(1 - q^N)}{1 - q} \text{ si } q \neq 1, \text{ où } N = \text{nombre}$$

de termes de la somme, P = premier terme de la somme et q = raison de la suite. En simplifiant, on obtient :

$$z_n = i \left[ \frac{(1 - (-a))^n}{-i} \right] = (-a)^n - 1 = -1 + (1 + i)^n.$$

4°) a) On a  $|a| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ , d'où  $a = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$ . En désignant par  $\theta$  un argument de a, on a à la fois  $\cos \theta = -\cos \frac{\pi}{4}$  et  $\sin \theta = -\sin \frac{\pi}{4}$  et par suite  $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ .

Conclusion :  $|a| = \sqrt{2}$  et  $\arg a = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$ .

b) D'après les résultats précédents,  $z_{19} = -1 + \left( \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{19} = -1 + (\sqrt{2})^{19} e^{i\frac{19\pi}{4}}$

$= -1 + (\sqrt{2})^{18} \times \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{4}}$  (car  $e^{i\frac{19\pi}{4}} = e^{i\frac{16\pi}{4}} \times e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et  $e^{i\frac{16\pi}{4}} = 1$ ). Finalement on a :

$$z_{19} = -1 + 2^9 \times \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = -1 + 2^9 (-1 + i) = -1 - 512 + 512i, \text{ soit :}$$

$$\mathbf{z_{19} = -513 + 512i.}$$

5°) S a une écriture complexe de la forme  $z' = \alpha z + \beta$ .

On a  $S(A_0) = A_1$  et  $S(A_1) = A_2$ , donc  $z_1 = \alpha z_0 + \beta$  et  $z_2 = \alpha z_1 + \beta$ , ce qui se traduit par :

$$z_1 = \alpha \cdot 0 + \beta \Rightarrow i = \beta. \text{ Et } 2i - 1 = \alpha i + i \Rightarrow \alpha i = i - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{i-1}{i} = \frac{(i-1)(-i)}{1} = \frac{1+i}{1}.$$

Ainsi  $\alpha = 1 + i$  et  $\beta = i$ . L'écriture complexe de S est donc  $S : z \mapsto (1 + i)z + i$ .

On en conclut que S est la similitude directe de rapport  $\sqrt{2}$ , d'angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et de centre le point

$$\Omega \text{ d'affixe } \frac{i}{1-1-i} = -1.$$

## EXERCICE 2

1°) a) Les séries marginales de X et Y sont données par les tableaux suivants:

Série marginale de X

$x_i$	16	18	20	22	26
$n_{i\bullet}$	1	5	4	6	4

Série marginale de Y

$y_j$	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6
$n_{\bullet j}$	1	5	6	4	2	2

Rappelons que les effectifs marginaux de X sont obtenus en prenant les totaux figurant au bas de chaque colonne et que les effectifs marginaux de Y sont obtenus en prenant les totaux figurant à droite de chaque ligne.

$$\text{b) } \bar{x} = \frac{(1 \times 16) + (5 \times 18) + (4 \times 20) + (22 \times 6) + (4 \times 26)}{20} = 21,1.$$

$$\bar{y} = \frac{(1 \times 2,6) + (5 \times 2,8) + (6 \times 3) + (4 \times 3,2) + (2 \times 3,4) + (2 \times 3,6)}{20} = 3,07.$$

c) Le coefficient de corrélation de x et y est donné par la formule  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y}$

$$\text{avec } \sigma_{xy} = \frac{1}{20} \sum n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \times \bar{y}.$$

Le calcul détaillé donne :  $\sum n_{ij} x_i y_j = (23,6 \times 26 \times 1) + 2,8[(16 \times 1) + (18 \times 1) + (22 \times 3)] + 3[(2 \times 18) + (2 \times 22) + (2 \times 26)] + 3,2[(20 \times 3) + (22 \times 1)] + 3,4[(18 \times 2)] + 3,6 [(20 \times 1) + (26 \times 1)] = 1294$ .

$$\text{Par conséquent, } \sigma_{xy} = \frac{1294}{20} - (21,1 \times 3,07) \simeq -0,077.$$

La variance de X est donnée par la formule :  $V(x) = \frac{1}{20} \sum x_i^2 n_{i\bullet} - \bar{x}^2 = \frac{9084}{20} - 21,1^2$ .

On en déduit la valeur de  $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$ .  $\sigma_x \simeq 2,99$ .

De même  $V(y) = \frac{1}{20} \sum y_j^2 n_{\bullet j} - \bar{y}^2 \Rightarrow \sigma_y \simeq 0,27$ .

On obtient finalement :  $r = \frac{-0,077}{2,99 \times 0,27} \simeq -0,09$ .

r étant proche de 0, on peut estimer **qu'il y a une très faible corrélation**.

2°) a) Il y a (voir tableau) 4 bébés pesant 3,2 kg et 20 bébés en tout, donc, d'après

l'hypothèse d'équiprobabilité,  $p(A) = \frac{4}{20} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{5}$ .

De même, il y 6 mamans de 22 ans donc  $p(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ .

Il y a un seul bébé pesant 3,2 kg et dont la maman a 22 ans :  $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$ .

D'après la formule  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ , on en déduit que :

$$p(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{9}{20}.$$

b) La probabilité demandée est celle qu'un bébé pèse 2,8 kg sachant que la mère n'a pas 22

ans. Ainsi  $p(C | \overline{B}) = \frac{p(C \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{14}{20}} = \frac{1}{7}$ . En effet, pour avoir  $\text{card}(C \cap \overline{B})$ , on

considère les bébés qui pèsent 2,8 kg (il y en a 5 en tout d'après le tableau), et on en enlève les 3 dont la maman a 22 ans. Par suite,  $\text{card}(C \cap \overline{B}) = 5 - 3 = 2$ , d'où  $p(C \cap \overline{B}) = \frac{2}{20}$ , et par ailleurs il y a  $20 - 6 = 14$  mamans non âgées de 22 ans.

## PROBLEME

### PARTIE A

1°) Si  $x \geq 0$ ,  $f(x) = (2+x)e^{-x}$  existe toujours (la fonction exponentielle étant définie sur  $\mathbb{R}$ ).

Si  $x < 0$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si  $x \neq 1$  et  $x \neq -1$  car l'expression  $\frac{x-1}{x+1}$  doit exister et être non nulle. Or, comme si  $x$  est  $< 0$ , il est évidemment  $\neq 1$ , on doit avoir  $x \neq -1$ .

Conclusion :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ .

2°) a) •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = |1| = 1$  (continuité de la fonction valeur absolue)  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 0$  (1). (d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, car  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ )

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$  (2).

Les relations (1) et (2) entraînent que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = +\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty$ .

On en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ .

• De même, on montre que :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2+x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} - \frac{x}{e^x} = 0$  d'après les limites usuelles du cours (car,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ).

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 0$  : on en conclut que la droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$ .

Par ailleurs, les droites d'équations  $x = -1$  et  $y = 0$  sont également asymptotes à  $\mathcal{C}_f$ .

3°) a) •  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 + 0 = \underline{2}$ .

•  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (2+x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \times 1 = \underline{2}$ .

- $f(0) = (2 + 0)e^{-0} = \underline{2}$ .

Il en résulte que **f est continue en 0**.

**b)** • Posons  $t = -x \Rightarrow x = -t$ . Quand  $x$  tend vers 0,  $t$  tend aussi vers 0. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x}-1)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t-1)}{-t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t-1)}{t} = -1, \text{ d'après une limite usuelle du cours.}$$

- Toujours avec le même changement de variable  $x = -t$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{-t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = -1, \text{ d'après une autre limite usuelle du cours.}$$

**c)** •  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2+x)e^{-x}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^{-x}-1)}{x} + e^{-x} = -2 + 1 = -1$ , car d'après la question précédente,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-x}-1)}{x} = -1$ .

On en conclut que **f est dérivable à droite en 0 et que  $f'_d(0) = -1$** .

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ 1 + \frac{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{x} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ 1 + \frac{\ln|x-1|-\ln|x+1|}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]$   
 $= 1 - 1 - 1 = -1$ , car il est bien connu que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  et d'après la question précédente,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$ .

On en conclut que **f est dérivable à gauche en 0 et que  $f'_g(0) = -1$** .

- On constate que les nombres dérivés à droite et à gauche de 0 existent et sont tous deux égaux à  $-1$  : Par conséquent, **f est dérivable en 0 et  $f'(0) = -1$** .

**4°)** • f est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit des deux fonctions dérivables sur cet intervalle  $u : x \rightarrow (2 + x)$  et  $v : x \rightarrow e^{-x}$ .

Pour  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ , d'après la formule de dérivation d'un produit, soit :

$$f'(x) = e^{-x} + (-e^{-x}(2+x)) = e^{-x} - 2e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(-1-x).$$

- f est dérivable sur  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$  comme somme des deux fonctions dérivables sur cet intervalle  $u_1 : x \rightarrow (x + 2)$  et  $v_1 : x \rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ .

Pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ ,  $f'(x) = u_1'(x)v_1(x) + u_1(x)v_1'(x)$ , d'après la formule de dérivation d'un produit, soit :

$$f'(x) = 1 + \left[ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \right]' = 1 + \frac{\left[ \left( \frac{x-1}{x+1} \right)' \right]}{\frac{x-1}{x+1}} = 1 + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}.$$

5°) • Pour  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $(-1-x)$ , quantité qui est évidemment **négative sur  $]0; +\infty[$** , car  $e^{-x}$  est toujours positif pour tout  $x$  réel.

• Pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $(x^2 - 1)$ , car son numérateur  $x^2 + 1$  est toujours positif. Or,  $(x^2 - 1)$  est **positif sur  $] -\infty; -1[$**  et **négatif sur  $] -1; 0[$** .

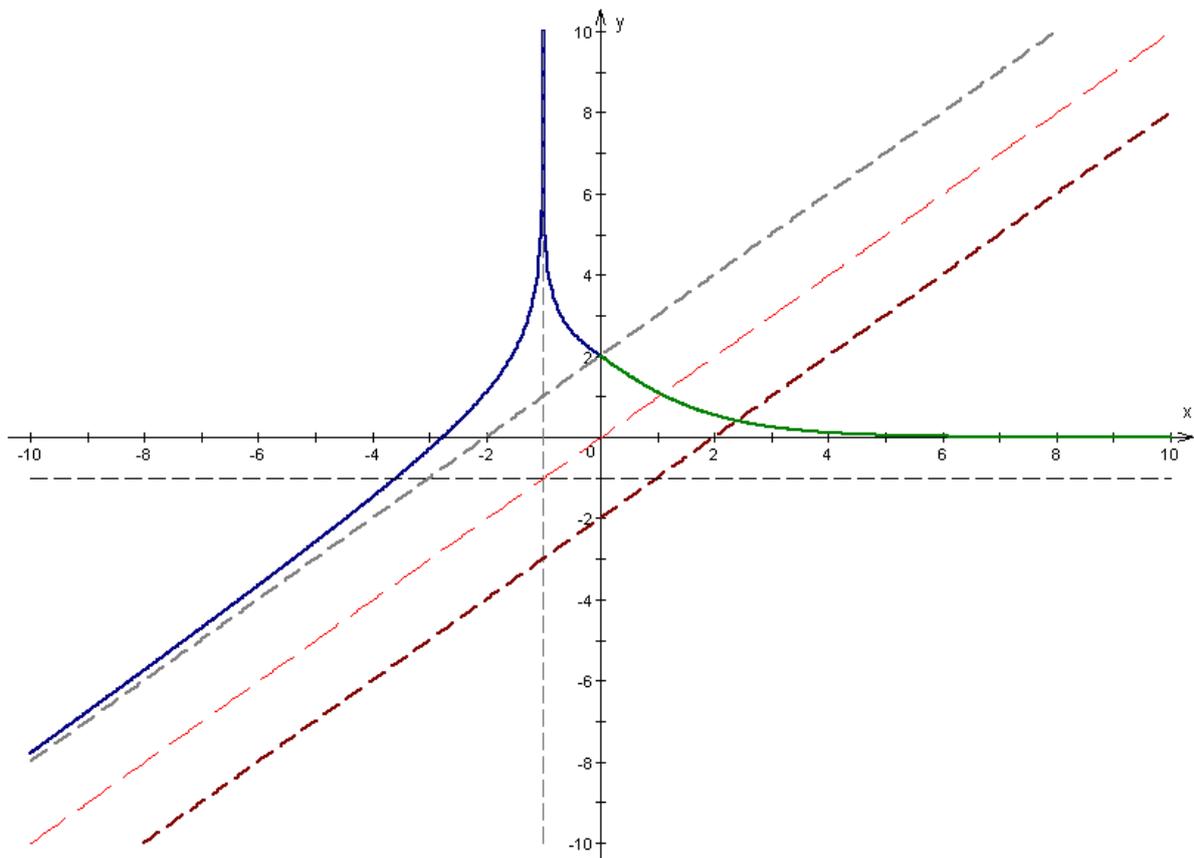
6°) Le tableau suivant résume les résultats précédents:

x	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
f	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$0$

7°) D'après l'étude de fonction précédente,  $f$  est continue et strictement décroissante, donc bijective sur  $] -\infty; -1[$ .  $f$  réalise donc une bijection de  $] -\infty; -1[$  vers  $f(] -\infty; -1[) = \mathbb{R}$ . Or  $0$  appartient à  $\mathbb{R}$ . Donc  $0$  a un unique antécédent par la bijection  $f$  : en d'autres termes, l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution dans  $] -\infty; -1[$ , soit  $\alpha$ .

Par ailleurs,  $f(-3) = -3 + 2 + \ln \left| \frac{-3-1}{-3+1} \right| = -1 + \ln 2 < 0$  et  $f(-2) = -2 + 2 + \ln \left| \frac{-2-1}{-2+1} \right| = \ln 3 > 0$ .  $f$  est continue sur  $[-3; -2]$  (car elle l'est sur  $] -\infty; -1[$ ) et  $f(-3) \times f(-2) < 0$ , donc d'après le théorème de Cauchy (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution dans  $[-3; -2]$ . Comme on sait par ailleurs que cette équation a une unique solution dans  $] -\infty; -1[$ , on en conclut que  $\alpha \in [-3; -2]$ .

8°)



### PARTIE B

1°)  $g$  est continue et strictement décroissante, donc bijective sur  $] -\infty; -1[$ .  $g$  réalise donc une bijection de  $] -\infty; -1[$  vers  $J = g(] -\infty; -1[) = \mathbb{R}$ .

2°) a) et b)  $g(-2) = \ln 3$  (déjà calculé au 7° de la partie A). On en déduit que  $g^{-1}(\ln 3) = -2$

$$\text{Or, } g'(-2) = \frac{(-2)^2+1}{(-2+1)(-2-1)} = \frac{5}{3} \neq 0.$$

(cf l'expression de  $f'(x)$  trouvée au 4° de la partie A).

D'après le théorème de dérivation de la bijection réciproque,  $g^{-1}$  est dérivable en  $\ln 3$  et

$$g^{-1}'(\ln 3) = \frac{1}{g'(-2)} \Rightarrow g^{-1}'(\ln 3) = \frac{3}{5}.$$

c) Voir figure précédente. La courbe de  $g^{-1}$  est symétrique de celle de  $g$  par rapport à la première bissectrice  $\Delta : y = x$ . Elle admet pour asymptotes les symétriques de celles de  $g$  par rapport à  $\Delta$ , à savoir les droites d'équations respectives  $y = -1$  et  $x = y + 2$ .

### PARTIE C

En observant la courbe, on voit que  $\mathcal{A} = \int_{-3}^{-2} [f(x) - (x+2)] dx$  (d'après la formule de calcul de l'aire limitée par deux courbes), soit  $\mathcal{A} = \int_{-3}^{-2} \left[ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right] dx = \int_{-3}^{-2} \left[ \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right] dx$ .

Intégrons par parties en posant :

$$u(x) = \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \Rightarrow u'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)} \text{ et } v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x.$$

$$\text{On a alors } \mathcal{A} = \left[ x \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right]_{-3}^{-2} - \int_{-3}^{-2} \frac{2x}{(x+1)(x-1)} dx = -2 \ln 3 + 3 \ln 2 - \int_{-3}^{-2} \frac{2x}{x^2-1} dx.$$

Soit  $\mathcal{A} = 3 \ln 2 - 2 \ln 3 - [\ln(|x^2 - 1|)]_{-3}^{-2} = 3 \ln 2 - 2 \ln 3 - (\ln 3 - \ln 8)$ , soit finalement :  $\mathcal{A} = 6 \ln 2 - 3 \ln 3$ .

**BAC S2 2007 1<sup>er</sup> groupe. SOLUTION**









## BAC S2 2006 2<sup>e</sup> groupe. SOLUTION

### EXERCICE 1

1°)  $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ , d'après la courbe fournie par l'énoncé (toute droite verticale coupe (  $\mathcal{C}$  ) une fois, sauf la droite d'équation  $x = 2$  !)

2°)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 3$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = -\infty$  (résultats obtenus par lecture graphique).

3°) L'asymptote oblique passe, par exemple, par les points A (0,1) et B (-2, 0). Son équation est donc :  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

4°) Les autres asymptotes ont pour équations :  $y = -2$  ;  $x = 0$  ;  $x = 2$ .

5°) f n'est pas dérivable en 5 car la courbe présente en ce point deux demi-tangentes : une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 1 et une demi-tangente horizontale à droite.

6°)

x	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$5$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+		+		+
f	$-2$	$-4$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

7°) g(x) existe si et seulement si  $f(x) > 0$ , ce qui équivaut à, d'après la figure, (ou le tableau variation) :  $x \in ]-1 ; 2[ \cup ]3 ; +\infty[ = D_g$ .

### EXERCICE 2

1°) On trouve facilement après réduction au même dénominateur du second membre et identification des numérateurs :  $a = 1$  ;  $b = -1$ .

2°) a)  $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^e \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^e = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$ .

b) On pose :  $u(x) = \ln x$  et  $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ . En utilisant la remarque de l'énoncé, on en déduit que :  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v(x) = -\frac{1}{1+x}$ . D'où :

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)} dx = \left[ -\frac{\ln x}{1+x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx$ . Cette dernière intégrale ayant déjà été calculée au 1°,

on trouve finalement :  $I = -\frac{1}{1+e} + 1 - \ln(e+1) + \ln 2$ .

### EXERCICE 3

Notons  $R_1$  (respectivement  $J_1$ ) l'événement : « la boule tirée de l'urne  $U_1$  est rouge » (respectivement « la boule tirée de l'urne  $U_1$  est jaune »).

Notons  $R_2$  (respectivement  $J_2$ ) l'événement : « la boule tirée de l'urne  $U_2$  est rouge » (respectivement « la boule tirée de l'urne  $U_2$  est jaune »).

a)  $p(A) = p(R_1) = \frac{3}{7}$

**b)**  $p(B) = p(R_2 / R_1)$ . Or si  $R_1$  est réalisé, c'est-à-dire si la boule tirée de  $U_1$  est rouge, la composition de l'urne  $U_2$  après qu'on y ait introduit cette boule est : 3 rouges et 3 jaunes. dans ces conditions, la probabilité d'avoir une boule rouge de  $U_2$  est :  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Ainsi :  $p(B) = \frac{1}{2}$ .

**c)**  $p(C) = p(R_2) = p(R_2 / R_1) \times p(R_1) + p(R_2 / J_1) \times p(J_1)$ , d'après la formule des probabilités totales. On a  $p(J_1) = \frac{4}{7}$  et par un raisonnement analogue au b) on voit que:  $p(R_2 / J_1) = \frac{1}{3}$ .

Par suite :  $p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$ , soit  $p(C) = \frac{17}{42}$ .

#### **EXERCICE 4**

**1°)** L'équation caractéristique est :  $r^2 - r - 2 = 0$  qui a pour solutions  $r_1 = -1$  et  $r_2 = 2$ . Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$y = A e^{-x} + B e^{2x}.$$

**2°)** Les conditions imposées équivalent à :  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = 1$ .

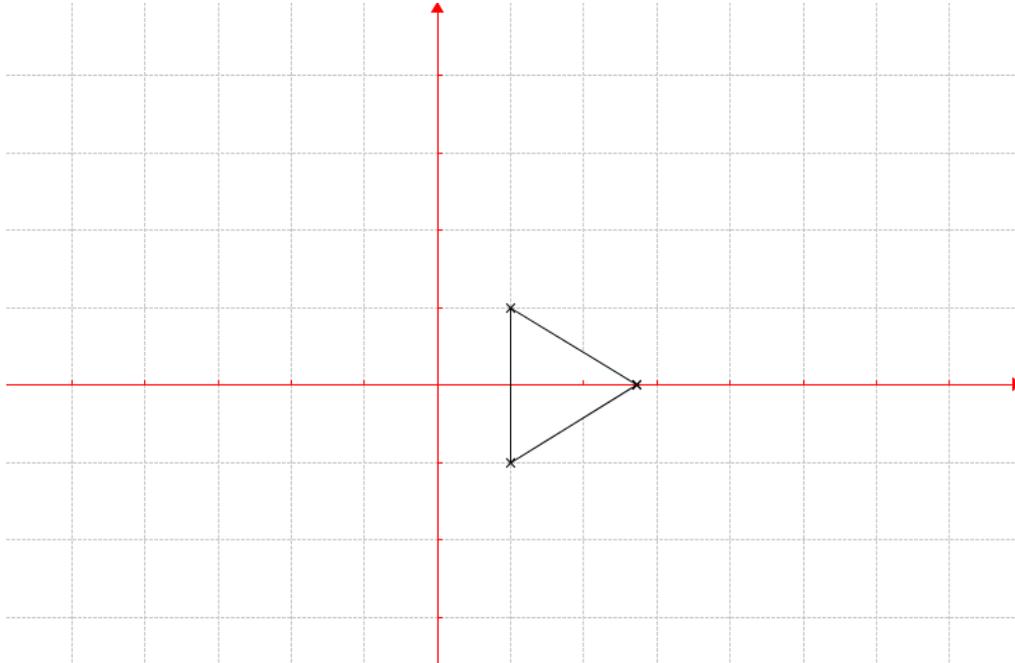
On a  $f'(x) = -A e^{-x} + 2B e^{2x}$ . Donc on doit avoir :  $A + B = 2$  et  $-A + 2B = 1$ , d'où après des calculs faciles :  $A = B = 1$ .

La fonction  $f$  cherchée est donc définie par :  $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$ .

## BAC S2 2006 1<sup>er</sup> groupe. SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) a) Le discriminant réduit de l'équation est  $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$ . D'où les solutions :  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = 1 - i$ .  $S = \{1 - i; 1 + i\}$ .



2°) a)

Montrons que le triangle ABC est équilatéral. En effet, en posant  $z_C = \sqrt{3} + 1$ , on a :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \left( \frac{z_C - z_1}{z_2 - z_1} \right) = \arg \left( \frac{\sqrt{3} - i}{-2i} \right) = \arg \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

et :  $AB = |z_2 - z_1| = |-2i| = 2$  ;  $AC = |z_C - z_1| = |\sqrt{3} - i| = 2$ .

Ainsi,  $AB = AC$  et l'angle géométrique BAC mesure  $\frac{\pi}{3}$  radians ou  $60^\circ$  : **le triangle ABC est équilatéral**. On aurait pu également démontrer que :  $AB = AC = BC$  car :

$$BC = |z_C - z_1| = |\sqrt{3} + i| = 2.$$

2°) L'équation caractéristique est :  $r^2 - 2r + 2 = 0$  qui a pour solutions, d'après 1°,  $1 - i$  et  $1 + i$ . Les solutions de l'équation différentielle proposée sont donc les fonctions de la forme :

$$y = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

3°) a) En effet, les solutions de l'équation différentielle  $ay'' - by' + cy = 0$  sont de la forme :  $x \mapsto (A \cos x + B \sin x) e^x$  si et seulement si l'équation  $ar^2 - br + c = 0$  a des solutions complexes conjuguées de la forme  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  avec  $\alpha = \beta = 1$  autrement dit si et seulement si  $1 + i$  et  $1 - i$  sont exactement les solutions de l'équation  $ar^2 - br + c = 0$ .

b) L'événement en question est réalisé, d'après ce qui précède, si et seulement si  $1 + i$  est solution de l'équation  $ar^2 - br + c = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si :

$$a(1 + i)^2 - b(1 + i) + c = 0 \Leftrightarrow 2ia - b - bi + c = 0 \Leftrightarrow (c - b) + i(2a - b) = 0$$

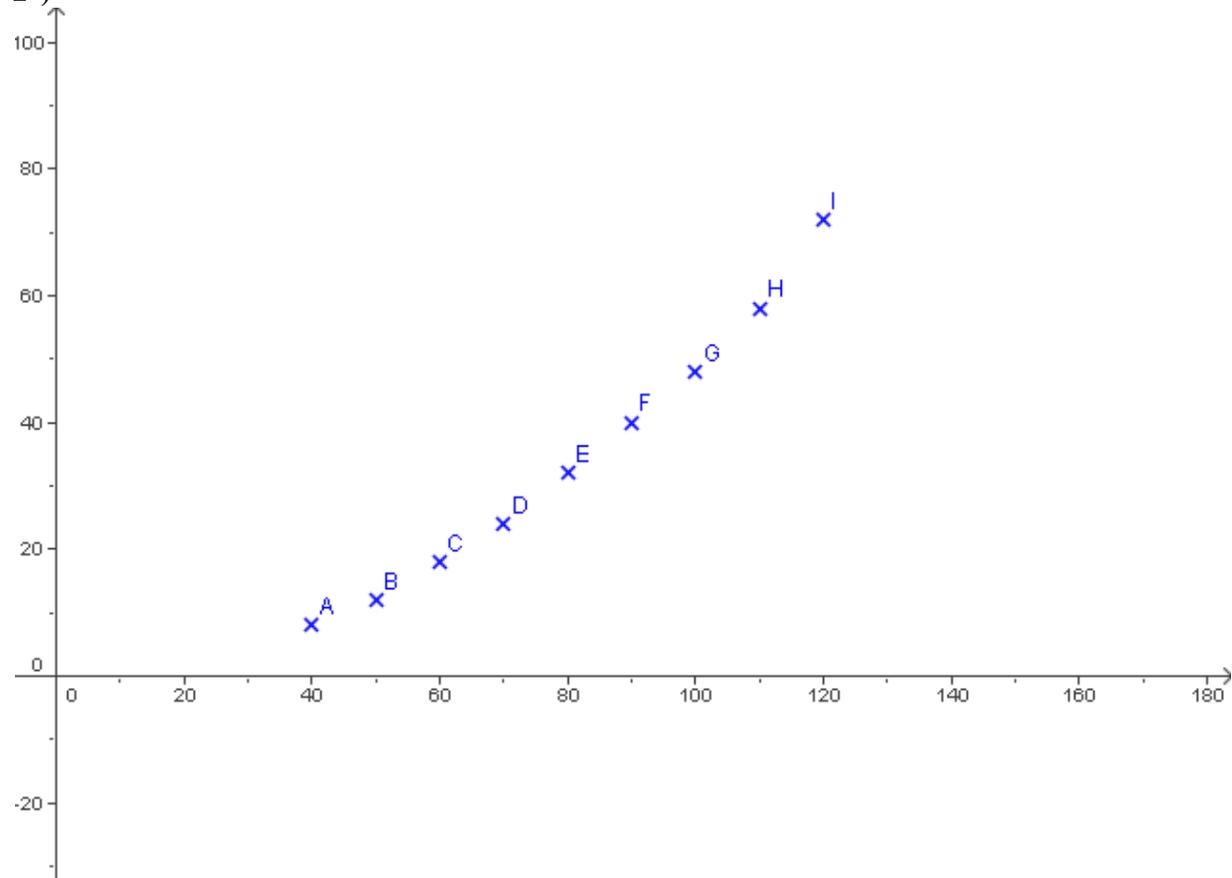
$\Leftrightarrow c = b = 2a$ . Cherchons parmi les  $6^3 = 216$  triplets qu'il est possible d'obtenir quand on lance trois fois de suite un dé, combien d'entre eux satisfont à cette condition. Remarquons tout d'abord que  $c$  est nécessairement pair. Si  $c = 2$ , on obtient le triplet  $(1, 2, 2)$ . Si  $c = 4$ , on

obtient le triplet (2, 4, 4) . Enfin si  $c = 6$ , on obtient le triplet (3, 6, 6). Ainsi, seuls 3 triplets peuvent vérifier cette condition. La probabilité de l'événement en question est donc  $\frac{3}{216}$  .

## EXERCICE 2

### Partie A

1°)



1°) Pour avoir les paramètres de la série statistique (X , Y ) , nous présentons les calculs dans un tableau :

X	40	50	60	70	80	90	100	110	120	$\Sigma x_i = 720$
Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72	$\Sigma y_i = 312$
$x_i y_i$	320	600	1080	1680	2560	3600	4800	6380	8640	$\Sigma x_i y_i = 29660$
$x_i^2$	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000	12100	14400	$\Sigma x_i^2 = 63600$
$y_i^2$	64	144	324	576	1024	1600	2304	3364	5184	$\Sigma y_i^2 = 14584$

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \times \Sigma x_i = 80 ; \quad \bar{y} = \frac{1}{9} \times \Sigma y_i = 34,66 ; \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{8} \Sigma x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = 522,22 .$$

$$V(x) = \frac{1}{9} \Sigma x_i^2 - \bar{x}^2 = 666,667 \Rightarrow \sigma_x \approx 25,8199 .$$

$$V(y) = \frac{1}{8} \Sigma y_i^2 - \bar{y}^2 = 418,66 \Rightarrow \sigma_y \approx 20,4613 .$$

2°)  $D_{y/x}$  a pour équation :  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$  avec  $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{522,22}{666,667} \simeq 0,7833$ .

Après calculs, on trouve qu'une équation de  $D_{y/x}$  est  $y = 0,7833x - 28$ .

3°) Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors :  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \simeq 0,988$ .

$r$  étant très proche de 1 (supérieur à 0,9), on peut estimer qu'on a une bonne corrélation.

4°) a) Si  $x = 150$ , on obtient en remplaçant dans l'équation de  $D_{y/x}$  précédente,  $y = 89,45$ .

Cette distance étant supérieure à 85m, **l'automobiliste percutera bien l'obstacle.**

b) Pour ne pas heurter l'obstacle, il faut que la distance de freinage ( $y$ ) soit inférieure ou égale à 85m, soit :  $0,7833x - 28 \leq 85 \Rightarrow x \leq 144,26$ .

**La vitesse maximale est donc d'environ 144 km/h.**

### Partie B

1°) Il y a eu  $N = 440 + 360 + 110 + 90 = 1000$  accidents.

2°)  $f_{y_2/x_1} = \frac{360}{440 + 360} = 0,45$  ou **45 %**.  $f_{x_2/y_2} = \frac{90}{360 + 90} = 0,2$  ou **20 %**.

3°)  $f_{.1} = \frac{n_{.1}}{N}$  où  $n_{.1}$  désigne l'effectif partiel marginal de  $y_1$ , c'est-à-dire la somme des effectifs partiels contenus dans la colonne de  $y_1$ .

Ainsi,  $f_{.1} = \frac{440 + 110}{1000} = 0,55$  ou **55 %**.

De même :  $f_{.2} = \frac{110 + 90}{1000} = 0,2$  ou **20 %**.

### PROBLEME

#### Partie I

1°) a)  $h$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbf{R}$  et :

$\forall x \in \mathbf{R}, h'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$  (formule de dérivation d'un produit).  $h'(x)$  est donc du signe de  $(x-2)$ , puisqu'une exponentielle est toujours positive, et le tableau de variation de  $h$  en découle.

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	+	
$h$			

b) Sur  $] -\infty ; 2 ]$ ,  $h$  est décroissante, d'après le tableau précédent et par conséquent :

$\forall x \leq 2, h(x) \geq h(2)$  avec  $h(2) = 0$  :  $h$  est positive sur  $] -\infty ; 2 ]$ .

Sur  $[ 2 ; +\infty [$ ,  $h$  est croissante, d'après le tableau précédent et par conséquent :

$\forall x \geq 2, h(x) \geq h(2)$  avec  $h(2) = 0$  :  $h$  est positive sur  $[ 2 ; +\infty [$ .

On en conclut que  $\forall x \in \mathbf{R}, h(x) \geq 0$ .

2°) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$ , par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$ , par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$ , donc  $(\mathcal{C})$  admet au voisinage de  $-\infty$  une

branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .

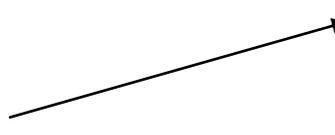
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 \times \frac{x}{e^x} = 0$ , car on sait que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$   
 $(\mathcal{C})$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote oblique d'équation  $y = x$ .

d) D'autre part :  $f(x) - x = x e^{2-x} > 0$  pour  $x > 0$ , donc  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de son asymptote oblique  $\Delta$ .

3°) a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme somme de fonctions dérivables et :

$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 1 + e^{2-x} + x(-e^{2-x}) = (1-x)e^{2-x} = h(x)$  : formule de dérivation d'un produit. Or on a vu à la question 1.b que  $h$  est positive sur  $\mathbf{R}$ . Il en résulte que  $f'$  est positive sur  $\mathbf{R}$  et s'annule uniquement en 2 :  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)		+	+
f	$-\infty$		$+\infty$



b)  $f$  étant continue (comme produit de fonctions continues) et strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ , réalise une bijection de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$  d'après le tableau de variation précédent. Elle admet donc une bijection réciproque  $f^{-1}$ .

c)  $f(2) = 4$ , donc  $f^{-1}(4) = 2$ . Or on a vu que  $f'(2) = 0$  : donc  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 4.

d) Au point d'abscisse 2,  $(\mathcal{C})$  admet une tangente horizontale, car  $f'(2) = 0$ . Cette tangente (T) a pour équation  $y = f(2) = 4$ . Pour déterminer la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à (T),

éudions le signe de  $f(x) - 4$ . Comme  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ ,

$f(x) > 4 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x > 2$  :  $(\mathcal{C})$  est donc au-dessus de (T) sur l'intervalle  $[2; +\infty$  [ et en-dessous sur l'intervalle  $]-\infty; 2]$ .

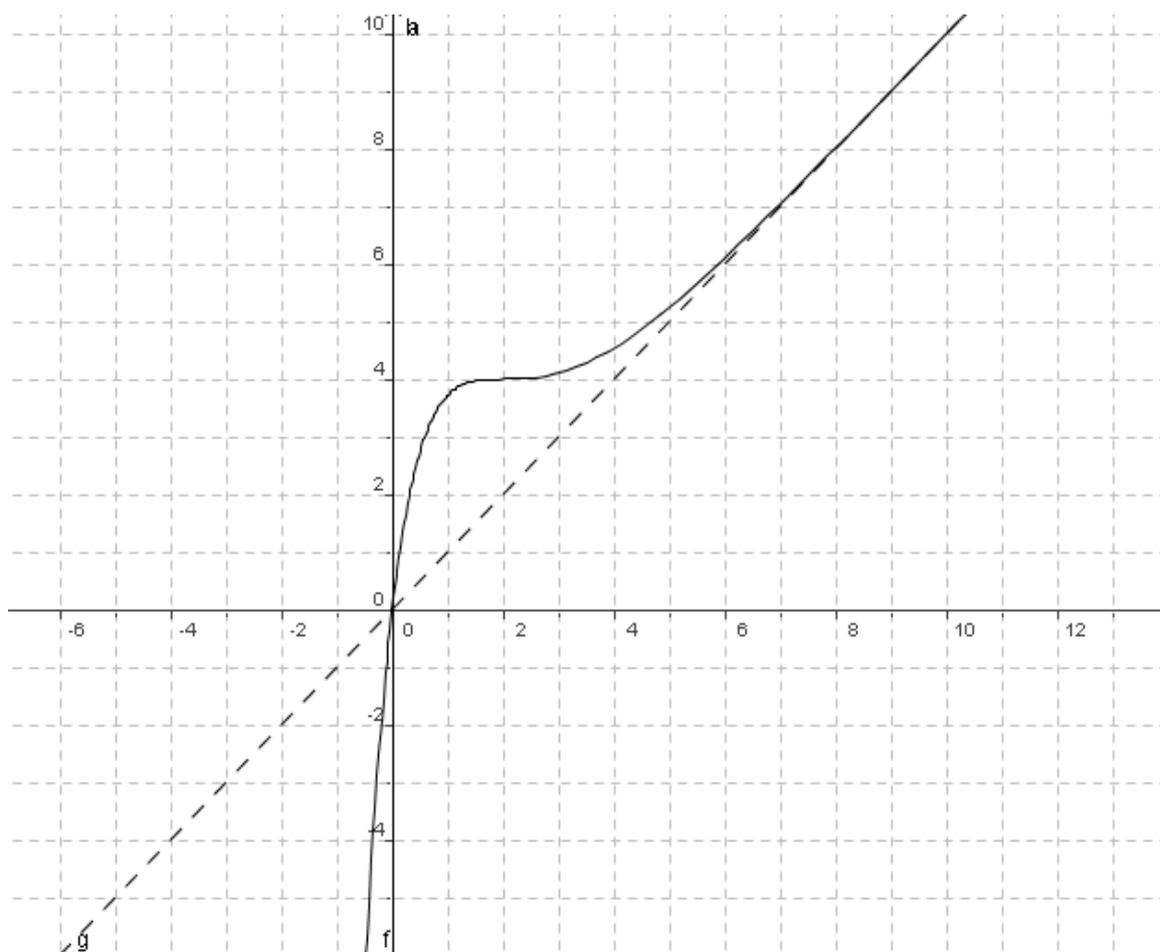
N.B. Au point d'abscisse 2, on a un point d'inflexion :  $(\mathcal{C})$  « traverse » sa tangente.

e) et f) : cf. ci-dessous.

## Partie II

a)  $(\lambda) = 4 \times \int_0^\lambda [f(x) - x] dx = 4 \times \int_0^\lambda x e^{2-x} dx$ . Intégrons par parties en posant :

$u(x) = x$  et  $v'(x) = e^{2-x}$ . Cela entraîne que :  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -e^{2-x}$ .



$$\text{D'où : } a(\lambda) = 4 \times \left( [-xe^{2-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{2-x} dx \right) = 4 \times [-xe^{2-x} - e^{2-x}]_0^\lambda = 4[e^2 - (\lambda + 1)e^{2-\lambda}].$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda + 1)e^{2-\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^2 \frac{\lambda + 1}{e^\lambda} = 0 \quad \text{car : } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0, \text{ par}$$

conséquent :  $a = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = 4e^2$  : cela représente l'aire hachurée, c'est-à-dire l'aire de la

portion du plan limitée par la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et la droite  $\Delta : y = x$  située au-dessus de l'axe (Ox) (c'est l'aire d'une partie infinie du plan, et pourtant elle est finie !).

Commentaires : Sujet classique et faisable dans le temps imparti. L'auteur du sujet s'est arrangé pour que les calculs ne soient pas trop longs. A noter la prédominance des exercices portant sur la statistique dans les sujets récents. Les élèves ont donc intérêt désormais à bien maîtriser ce thème et surtout de connaître les différentes notations !

## BAC S2 2005 2<sup>e</sup> groupe . SOLUTION

### EXERCICE 1

On pose d'abord :  $u = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  et  $v' = e^x$  d'où :  $u' = -\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  et  $v = e^x$ .

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent : } I &= \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\pi}{4} e^x \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e - 1 + \int_0^1 \frac{\pi}{4} e^x \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx \quad (*) . \end{aligned}$$

Posons alors  $J = \int_0^1 e^x \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx$  et intégrons à nouveau par parties en posant :

$u = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  et  $v' = e^x$  d'où :  $u' = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  et  $v = e^x$ . On obtient alors :

$$J = \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\pi}{4} e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx , \text{ soit } J = \frac{\sqrt{2}}{2} e - \frac{\pi}{4} I . \text{ Reportant ceci dans } (*), \text{ on a :}$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} e - 1 + \frac{\pi}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} e - \frac{\pi}{4} I \right) \Rightarrow \left( 1 + \frac{\pi^2}{16} \right) I = \frac{\sqrt{2}}{2} e \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right) - 1 = \sqrt{2} e \left( \frac{4 + \pi}{8} \right) - 1 .$$

$$\text{D'où : } \frac{16 + \pi^2}{16} I = \frac{\sqrt{2} e (4 + \pi) - 8}{8} \Rightarrow I = \frac{2\sqrt{2} e (4 + \pi) - 16}{(16 + \pi^2)} .$$

### EXERCICE 2

$$1^\circ) z_1 = (1 + i) z_0 + 2i = (1 + i) i + 2i = -1 + 3i .$$

$$z_2 = (1 + i) z_1 + 2i = (1 + i) (-1 + 3i) + 2i = -4 + 4i .$$

2°) a) On a  $U_{n+1} = z_{n+1} + 2 = (1 + i) z_n + 2i + 2 = (1 + i) z_n + 2(1 + i) = (1 + i)(z_n + 2)$ .

Ainsi :  $U_{n+1} = (1 + i)U_n$  donc la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $(1 + i)$ . Il en résulte que :  $U_n = (1 + i)(U_0)^n = (1 + i)(z_0 + 2)^n = (1 + i)(i + 2)^n = (1 + i)(2 + i)^n$ .

b) On en déduit que :  $z_n = U_n - 2 = (1 + i)(2 + i)^n - 2$

$$\text{On a : } Z = \frac{z_{n+1} - i}{z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{(1 + i)z_n + i}{z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{(1 + i)\left(z_n + \frac{i}{1 + i}\right)}{z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} . \text{ Or, } \frac{i}{1 + i} = \frac{i(1 - i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i .$$

$$\text{D'où : } Z = 1 + i . \text{ Par conséquent : } |Z| = \frac{|z_{n+1} - i|}{\left|z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right|} = \frac{AM_{n+1}}{BM_n} = |1 + i| = \sqrt{2} ,$$

$$\text{et } \arg Z = \arg(z_{n+1} - i) - \arg\left(z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = (\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi) .$$

### EXERCICE 3

Soit P l'événement : « l'individu choisi est atteint de paludisme » ;

H l'événement : « l'individu choisi est un homme »

F l'événement : « l'individu choisi est une femme » .

Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par :  $p(H) = 0.48 \Rightarrow p(F) = 0.52$  ;  $p(P | H) = 0,04$  ;  $p(P | F) = 0,07$  ;

$$\text{a) } p(P \cap H) = p(P | H) \times p(H) = 0,04 \times 0,48 = \mathbf{0,0192} .$$

**b)**  $p(F \cap P) = p(P | F) p(F) = 0,07 \times 0,52 = \mathbf{0,0364}$ .

**c)**  $p(P) = p(F \cap P) + p(H \cap P) = 0,0192 + 0,0364 = \mathbf{0,0556}$

**d)**  $p(H \cap \overline{P}) = p(\overline{P} | H) \times p(H)$ . Or,  $p(\overline{P} | H) = 1 - p(P | H) = 1 - 0,04 = 0,96$ .

Donc  $p(H \cap \overline{P}) = 0,96 \times 0,48 = \mathbf{0,4608}$ .

**e)**  $p(H | P) = \frac{p(H \cap P)}{p(P)} = \frac{0,0192}{0,0556} = \mathbf{0,345}$ .

**f)**  $p(F | P) = \frac{p(F \cap P)}{p(P)} = \frac{0,0364}{0,0556} = \mathbf{0,655}$ .

#### **EXERCICE 4**

1) L'équation caractéristique est :  $r^2 + 25 = 0$ , d'où les racines :  $r = 5i$  et  $r = -5i$ .

La forme générale des solutions est donc :  $y = A \cos 5x + B \sin 5x$ .

$f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$  et  $y' = -5A \sin 5x + 5B \cos 5x$  donc :

$f'(0) = -5 \Rightarrow 5B = -5 \Rightarrow B = -1$ .

La fonction cherchée est donc celle vérifiant :  $f(x) = \cos 5x - \sin 5x$ .

2) Les abscisses  $x$  de ces points vérifient  $g(x) = 0$ , soit :

$$\cos 5x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - 5x \right) \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2k\pi \text{ ou } 5x = -\frac{\pi}{2} + 5x + 2k'\pi$$

La seconde alternative est manifestement impossible. La première équivaut à :

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Dans  $[0 ; 2\pi[$ , on trouve 5 solutions (pour les valeurs de  $k \in \{0,$

$1, 2, 3, 4, \}$  d'où 5 points d'intersection :

$A_1\left(\frac{\pi}{20}; 0\right)$   $A_2\left(\frac{9\pi}{20}; 0\right)$   $A_3\left(\frac{17\pi}{20}, 0\right)$   $A_4\left(\frac{5\pi}{4}; 0\right)$   $A_5\left(\frac{33\pi}{20}; 0\right)$

Commentaire : Il y avait beaucoup de calculs dans ce sujet, et il était difficile, à notre avis, pour un élève de tout trouver en 2 heures ! d'autre part, il fallait bien interpréter les probabilités conditionnelles !

## BAC S2 2005 1<sup>er</sup> groupe SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) Les solutions sont les racines cubiques de l'unité :

$$z_0 = 1; \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad S = \{z_0, z_1, z_2\}.$$

2°) a)  $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i.$

Finalemment :  $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i).$

b) L'équation E équivaut à :  $u^3 = 1$ , d'où d'après 1°,  $u = z_0$  ou  $u = z_1$  ou  $u = z_2$ . on en déduit que :  $z = z_0(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$  ou  $z = z_1(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$  ou  $z = z_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ .

Les solutions de (E) sont, sous forme exponentielle :

$$z_0' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}; \quad z_1' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}; \quad z_2' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}.$$

Sous forme trigonométrique, les solutions de (E) s'expriment ainsi :

$$z_0' = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right); \quad z_1' = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right);$$

$$z_2' = 2\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$$

Sous forme algébrique, on obtient :

$$z_0' = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}); \quad z_1' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right);$$

$$z_2' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right).$$

3°) En comparant les écritures trigonométrique et algébrique de  $z_1'$ , il vient :

$$2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et}$$

$$2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

### EXERCICE 2

1°) Pour avoir les paramètres de la série statistique  $(x_i, y_i)$ , nous présentons les calculs dans un tableau :

$x_i$	60	80	100	120	140	160	180	200
$y_i$	952	805	630	522	510	324	205	84
$x_i y_i$	57120	64400	63000	62640	71400	51840	36900	16800
$x_i^2$	3600	64000	10000	14400	19600	25600	32400	40000
$y_i^2$	906304	648025	396900	272484	260100	104976	42025	7056

$$\Sigma x_i = 1040; \quad \Sigma y_i = 4032; \quad \Sigma x_i y_i = 424100; \quad \Sigma x_i^2 = 152000; \quad \Sigma y_i^2 = 2637870.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \times \Sigma x_i = 130; \quad \bar{y} = \frac{1}{8} \times \Sigma y_i = 504; \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{8} \Sigma x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = -12507,5.$$

$$V(x) = \frac{1}{8} \sum x_i^2 - \bar{x}^2 = 2100 \Rightarrow \sigma_x \approx 45,825 .$$

$$V(y) = \frac{1}{8} \sum y_i^2 - \bar{y}^2 = 75717,75 \Rightarrow \sigma_y \approx 275,17 .$$

Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors :  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \approx -0,99$  .

Cette valeur de r justifie bel et bien la recherche d'un ajustement linéaire, car la corrélation est très forte (r très proche de - 1) .

$$2^\circ) D_{y/x} \text{ a pour équation : } y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \text{ avec } a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{-12507,5}{2100} \approx -5,95 .$$

Après calculs, on trouve qu'une équation de  $D_{y/x}$  est  $y = -5,95x + 1277,5$  .

3°) a) Le prix de vente est :  $yx$  (nombre d'exemplaires  $\times$  prix de vente d'un exemplaire) .

Le prix de revient est :  $25y + 28000$  (nombre d'exemplaires  $\times$  prix de fabrication d'un exemplaire + frais de conception) . Le bénéfice  $z$  est donc :

$$z = \text{Prix de vente} - \text{Prix de revient} = yx - (25y + 28000) .$$

$$\text{Soit : } z = (-5,95x + 1277,5)x - 25(-5,95x + 1277,5) - 28000 .$$

Après réduction, on trouve :  $z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$  .

b) Le bénéfice  $z(x)$  est maximal si  $z'(x) = 0 \Leftrightarrow -11,9x + 1426,25 = 0 \Leftrightarrow x = 119,85$  .

En reportant cette valeur de  $x$  dans  $z(x)$  , on trouve que le bénéfice maximal est :

$$z_{\max} = 25532,65 .$$

## PROBLEME

### Partie A

1°) a)  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de deux fonctions définies et dérivables

sur  $\mathbb{R}$  :  $f_1 : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$  (quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ )

$f_2 : x \mapsto \ln(1+e^x)$  (composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ ) .

$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{e^x}{e^x+1} = -\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$  .  $f'(x)$  est donc négative pour tout réel  $x$  et on obtient le tableau de variation suivant :

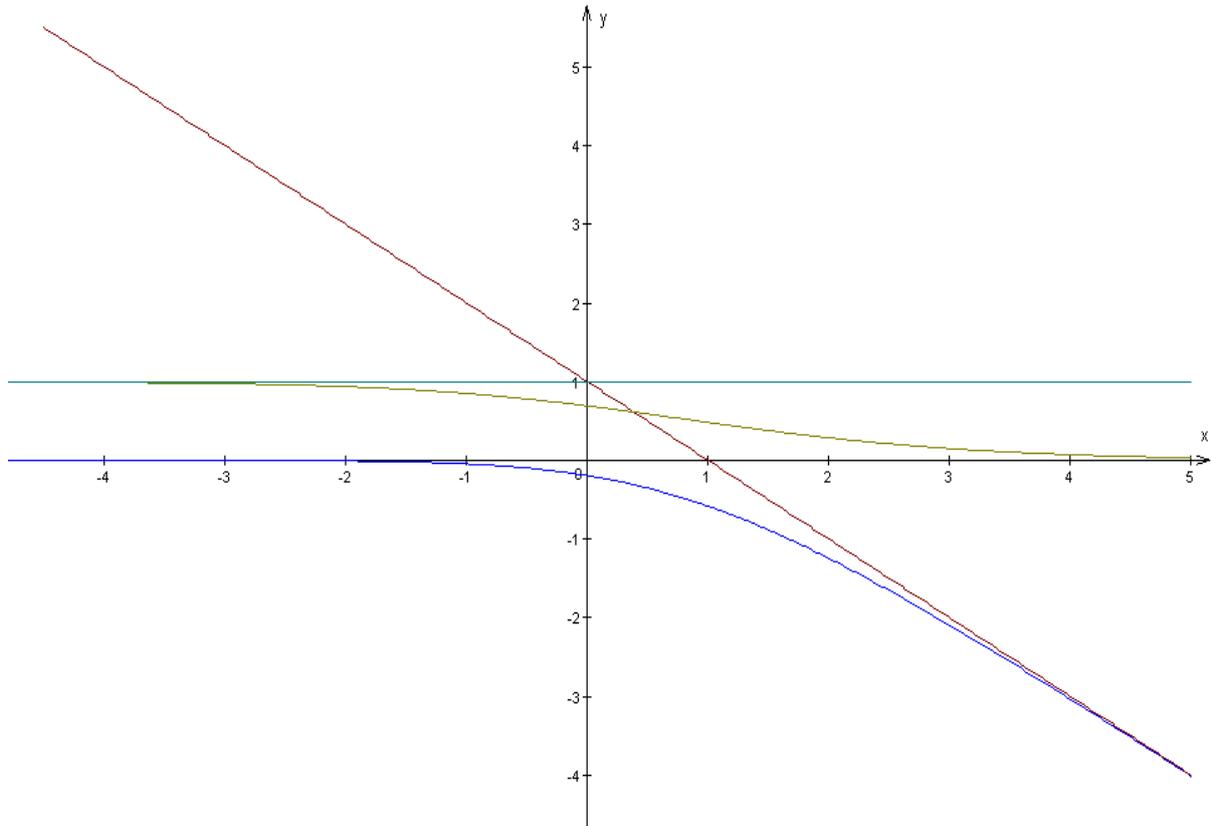
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
f	0	$-\infty$

$$b) f(x) - 1 + x = \frac{e^x}{1+e^x} - 1 + x - \ln(1+e^x) = \frac{-1}{1+e^x} + x - \ln(1+e^x)$$

$$= \frac{-1}{1+e^x} + x - \ln[e^x(1+e^{-x})] = \frac{-1}{1+e^x} - \ln(1+e^{-x}) \text{ car } \ln(e^x) = x .$$

D'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^{-x}) \right] = 0$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  admet donc la droite d'équation  $y = -x + 1$  pour asymptote au voisinage de  $+\infty$ .



c)  $f$  est continue et strictement décroissante, donc bijective de  $\mathbf{R}$  vers  $] -\infty ; 0 [$ .

2°) a)  $g$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme produit de deux fonctions dérivables :

$g_1 : x \mapsto e^{-x}$  dérivable comme composée des fonctions dérivables  $x \mapsto -x$  et  $x \mapsto e^x$ .

$g_2 : x \mapsto \ln(1 + e^x)$  dérivable comme composée des fonctions dérivables  $x \mapsto 1 + e^x$  et  $x \mapsto \ln x$ .

b)  $\forall x \in D_f, g'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \frac{e^x}{e^x + 1} = e^{-x} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right)$

D'où :  $g'(x) = e^{-x} f(x)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$  et en faisant le changement de variable  $v = e^x$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + v)}{v} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + v)}{1 + v} \times \frac{1 + v}{v} = 0 \times 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{v} = 1 \quad (\text{quand } x \rightarrow -\infty, v = e^x \rightarrow 0).$$

d)  $g'(x)$  est du même signe que  $f(x)$ , d'après 2°. b) et  $f(x)$  est négative pour tout  $x$  réel d'après 1°), par suite,  $g'(x)$  est négatif  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

Le tableau de variations de  $g$  en découle.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	—	
g	1	0

3°) a)  $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{e^x e^{-x}}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1}{1 + e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Si  $\lambda > 0$ , g étant continue sur  $\mathbb{R}$ , l'est *a fortiori* sur  $[0; \lambda]$ , donc  $\int_0^\lambda g(x)dx$  existe.

Si  $\lambda < 0$ , g étant continue sur  $\mathbb{R}$ , l'est *a fortiori* sur  $[\lambda; 0]$ , donc  $\int_\lambda^0 g(x)dx$  existe, or

$$\int_0^\lambda g(x)dx = - \int_\lambda^0 g(x)dx, \text{ donc } \int_0^\lambda g(x)dx \text{ existe.}$$

Enfin, si  $\lambda = 0$ ,  $\int_0^0 g(x)dx = 0$ . On intègre  $I(\lambda)$  par parties en posant :

$$u(x) = \ln(1 + e^x); \quad v'(x) = e^{-x} \text{ et donc : } u'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}; \quad v(x) = -e^{-x}. \text{ D'où :}$$

$$I(\lambda) = \left[ -e^{-x} \ln(1 + e^x) \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{1}{1 + e^x} dx = \left[ -e^{-x} \ln(1 + e^x) \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \text{ (en utilisant 3° a.).}$$

$$\text{On trouve donc : } I(\lambda) = -e^{-\lambda} \ln(1 + e^\lambda) + \ln 2 + \left[ -\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^\lambda$$

$$\text{Soit : } \mathbf{I(\lambda) = -e^{-\lambda} \ln(1 + e^\lambda) + \ln 2 - \ln(1 + e^{-\lambda}) + \ln 2.}$$

$$\text{c) } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \ln(1 + e^\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^\lambda)}{e^\lambda} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + v)}{v} = 0 \text{ (} v = e^\lambda \text{).}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-\lambda}) = \ln 1 = 0 \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0.$$

$$\text{Il en résulte que : } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbf{I(\lambda) = 2 \ln 2.}$$

### Partie B

1°) g est continue et strictement décroissante, donc bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $J = ]0; 1[$  (cf. tableau de variation de g).

2°) a)  $g(0) = \ln 2.$

b)  $g'(0) = f(0) = \frac{1}{2} - \ln 2 \neq 0 \Rightarrow g^{-1}$  est dérivable en  $x_0 = \ln 2$  et :

$$g^{-1}'(\ln 2) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \frac{2}{1 - 2 \ln 2}.$$

Cette équation est :  $Y = g^{-1}'(\ln 2)(X - \ln 2) + g^{-1}(\ln 2)$ . Or,  $g^{-1}(\ln 2) = 0$ .

$$\text{L'équation est donc : } \mathbf{Y = \frac{2}{1 - 2 \ln 2} (X - \ln 2).}$$

## BAC S2 2004 Remplacement SOLUTION

$$1^\circ) \text{ a) } \left( \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{-1+3i+3-i}{2\sqrt{2}} = \frac{2+2i}{2\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

b) Les solutions sont les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire les nombres

$$z_0 = 1; \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

c) En utilisant la remarque de l'énoncé, on voit que pour toute solution  $Z$  de (E),  $\left( \frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right)$

est une racine cubique de l'unité, donc que :  $\left( \frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) = z_0$  ou  $\left( \frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) = z_1$  ou

$\left( \frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) = z_3$ , soit  $Z_0 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  ou  $Z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} z_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$  ou enfin

:

$$Z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} z_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$S = \left\{ \frac{-1+i}{\sqrt{2}}; \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}; \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right\}$$

$$2^\circ) \text{ a) } \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}.$$

b) Les arguments des solutions de (E) sont, d'après les calculs précédents :

$$\arg Z_0 = \frac{3\pi}{4} [2\pi]; \quad \arg Z_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{12} [2\pi]; \quad \arg Z_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{12} [2\pi].$$

$$3^\circ) |Z_2| = \left| \frac{-1+i}{\sqrt{2}} z_2 \right| = \left| \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right| \times |z_2| = 1 \text{ et } \arg Z_2 = \frac{\pi}{12}, \text{ donc } Z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}.$$

En comparant avec l'écriture algébrique de  $Z_2$  obtenue au 1) c), on en déduit que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} .$$

4°) a) S est une **similitude directe** de rapport  $|\sqrt{2}(-1+i)| = 2$ , d'angle  $\arg(\sqrt{2}(-1+i)) = \frac{3\pi}{4}$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}(-1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{(1 + \sqrt{2})^2 + 2}$ ,

$$\text{soit } \omega = \frac{3 + \sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} + i \frac{2}{5 + 2\sqrt{2}} .$$

### EXERCICE 2

1°) Le centre de l'intervalle [5 ; 7] est 6 ; celui de l'intervalle [8 ; 10] est 9 ; celui de l'intervalle [11 ; 13] est 12 ; celui de l'intervalle [14 ; 18] est 16 .

D'autre part, il y a 6 individus dans la classe [5 ; 7], c'est-à-dire 6 familles dont l'effectif est compris entre 5 et 7 personnes ; 19 individus dans la classe [8 ; 10] ; 13 individus dans la classe [11 ; 13] ; 12 individus dans la classe [14 ; 18] (au total 50 individus) .

$$\text{On obtient donc : } \bar{X} = \frac{(6 \times 6) + (9 \times 19) + (12 \times 13) + (16 \times 12)}{50} = 11,1 .$$

$$\text{et} \quad \bar{Y} = \frac{(12,5 \times 4) + (20 \times 25) + (30 \times 21)}{50} = 23,6 .$$

$$V(X) = \frac{(6^2 \times 6) + (9^2 \times 19) + (12^2 \times 13) + (16^2 \times 12)}{50} - (11,1)^2 = 10,77 .$$

Par conséquent, l'écart-type de X est :  $\sigma_X = \sqrt{10,77} = 3,28$  .

$$V(Y) = \frac{(12,5^2 \times 4) + (20^2 \times 25) + (30^2 \times 21)}{50} - (23,6)^2 = 33,54$$

Par conséquent, l'écart-type de Y est :  $\sigma_Y = \sqrt{33,54} = 5,79$  .

$$2^\circ) z_1 = \frac{(1 \times 12,5) + (5 \times 20) + (0 \times 30)}{6} = 18,75$$

$$z_2 = \frac{(3 \times 12,5) + (9 \times 20) + (7 \times 30)}{19} = 22,5$$

$$z_3 = \frac{(0 \times 12,5) + (3 \times 20) + (9 \times 30)}{13} = 23,846 \approx 23,85 .$$

$$z_4 = \frac{(0 \times 12,5) + (3 \times 20) + (9 \times 30)}{12} = 27,5 .$$

(on calcule les effectifs en faisant la somme de chaque colonne du tableau) .

On obtient donc la série :

$x_i$	6	9	12	16
$z_i$	18,75	22,5	23,85	27,5

$$3^\circ) \text{ a) } \bar{x} = \frac{1}{4} \times \sum x_i = 10,75 ; \quad \bar{z} = \frac{1}{4} \times \sum z_i = 23,15 ; \quad \sum x_i z_i = 1041,2$$

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{4} \sum x_i z_i - \bar{x} \times \bar{z} = 11,4375 .$$

$$V(x) = \frac{1}{4} \sum x_i^2 - \bar{x}^2 = 13,682 \Rightarrow \sigma_x \approx 3,7 .$$

$$V(z) = \frac{1}{4} \sum z_i^2 - \bar{z}^2 = 9,796 \Rightarrow \sigma_z \approx 3,13 .$$

Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors :  $r = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x \times \sigma_z} \simeq -0,987$ .

Cette valeur de  $r$  justifie bel et bien la recherche d'un ajustement affine, car la corrélation est très forte ( $r$  très proche de  $-1$ ).

b)  $D_{z/x}$  a pour équation :  $z - \bar{z} = a(x - \bar{x})$  avec  $a = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x^2} \simeq 0,8356$ .

Après calculs, on trouve qu'une équation de  $D_{y/x}$  est  $y = 0,8356x + 14,167$ .

c) Si  $x = 20$ , alors en remplaçant dans l'équation de  $D_{z/x}$ , on trouve  $z = 30,87$ .  
On peut estimer qu'une famille de 20 personnes consommera **30,87 kg de sucre**.

## PROBLEME

### Partie A

1°) L'équation caractéristique est :  $-\frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{2}r - 1 = 0$ . Elle a pour solutions  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 1$ .

La forme générale des solutions de l'équation différentielle est donc :  $y = A e^{2x} + B e^x$ .

Les conditions imposées à la solution  $g$  se traduisent par :  $g(0) = -1$  et  $g'(0) = 0$ .

En posant  $g(x) = A e^{2x} + B e^x$ , on obtient :  $g'(x) = 2A e^{2x} + B e^x$ , d'où :

$A + B = -1$  et  $2A + B = 0$ . En résolvant ce système, on voit que :  $A = 1$  et  $B = -2$ .

Ainsi,  $g(x) = e^{2x} - 2e^x$ .

### Partie B

1°)  $f'(x) = 2(e^{2x} - e^x)$ .  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > x \Leftrightarrow x > 0$ .

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		-	+
f	0	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$

2°) a)  $f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} = 4 - 4 = 0$ ;  $f'(\ln 2) = 2(e^{2\ln 2} - e^{\ln 2}) = 4$ .

Une équation de la tangente à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse  $\ln 2$  est donc :  $y = 4(x - \ln 2)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times \frac{e^x - 2}{x} = +\infty$

(car :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{2}{x} = +\infty$ ).

On en déduit que  $(\Gamma)$  admet une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .

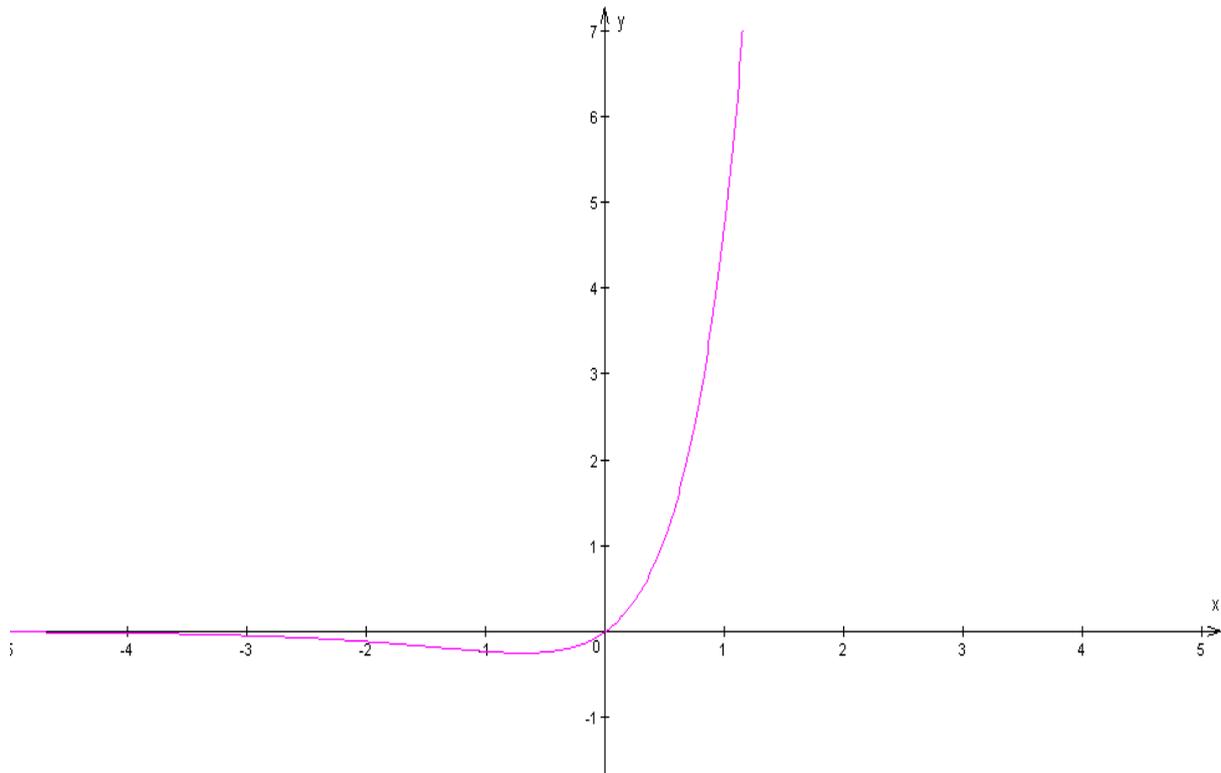
3°) a) Voir figure ci-dessous.

b)  $\mathcal{A}(\alpha) = -4 \int_{\alpha}^{\ln 2} f(x) dx = -4 \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x \right]_{\alpha}^{\ln 2} = 8 + 2e^{2\alpha} - 8e^{\alpha}$ . (ne pas oublier de

multiplier par l'aire du rectangle unité).

c)  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} 8 + 2e^{2\alpha} - 8e^{\alpha} = 8$  car  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} 2e^{2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} = 0$ .

Cela signifie que l'aire de la partie du plan limitée par  $(\Gamma)$ , l'axe  $(O, \vec{i})$  et l'axe  $(O, \vec{j})$  vaut  $8 \text{ cm}^2$ .



### Partie C

1°)  $h$  est continue et, d'après le tableau de variation du B 1°, strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ . Elle réalise donc une bijection de  $[0 ; +\infty[$  vers  $[-1 ; +\infty[$ .

2°)  $h(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$  ou  $e^x = 3$  (faire le changement de variable  $X = e^x$  pour se ramener à un trinôme). La première égalité étant manifestement impossible, il en résulte qu'on a nécessairement  $e^x = 3$ , d'où :  $x = \ln 3$ . on en déduit que :  $h^{-1}(3) = \ln 3$ .

or, d'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque,  $h^{-1}'(3) = \frac{1}{h'(h^{-1}(3))}$ ,

$$\text{soit } h^{-1}'(3) = \frac{1}{h'(\ln 3)} = \frac{1}{2(e^{2\ln 3} - e^{\ln 3})} = \frac{1}{12}.$$

3°) Soit  $x \in [-1 ; +\infty[$ .  $h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$  (avec  $y \in [0 ; +\infty[$ )

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2e^y - x = 0. \text{ On pose } Y = e^y. \text{ L'équation précédente devient : } Y^2 - 2Y - x = 0.$$

le discriminant de ce trinôme en  $Y$  est  $\Delta = 1 + x \geq 0$ . d'où les solutions :

$$Y_1 = 1 - \sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad Y_2 = 1 + \sqrt{1+x}. \text{ Comme } y \geq 0, \text{ on a } e^y \geq 1, \text{ d'où } Y \geq 1.$$

$$\text{Donc nécessairement } Y = Y_2 = 1 + \sqrt{1+x} \Leftrightarrow e^y = 1 + \sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow y = h^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x}).$$

4°) Voir figure ci-dessus.

Commentaire : Bon sujet donnant un bon aperçu de presque tout le programme. C'est le seul sujet portant sur ce type de série statistique (distribution en classes). Le problème est très classique.

## BAC S2 2004 2<sup>ème</sup> groupe . SOLUTION

### EXERCICE 1

$$1^{\circ}) U_1 = e \sqrt{U_0} = e \sqrt{e^3} = e^2 \sqrt{e}. \quad V_1 = \ln(U_1) - 2 = \ln(e^2 \sqrt{e}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$2^{\circ}) V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2 = \ln(e \sqrt{U_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2} \ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2} \ln(U_n) - 1 \\ = \frac{1}{2} [\ln(U_n) - 2] = \frac{1}{2} V_n.$$

Par conséquent,  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , de premier terme

$$V_0 = \ln(U_0) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

$$3^{\circ}) V_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } V_n + 2 = \ln(U_n) \text{ d'où : } U_n = e^{V_n+2} = \underline{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}}.$$

$$4^{\circ}) \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^2.$$

### EXERCICE 2

$$1^{\circ}) \text{ a) Par réduction au même dénominateur, } e^x - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

$$\text{b) } I = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[ e^x \right]_0^1 - \left[ \ln(1+e^x) \right]_0^1 = e - 1 - (\ln(1+e) - \ln 2) \\ = e - 1 - \ln \frac{1+e}{2}.$$

$$2^{\circ}) \text{ a) } f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

$$\text{b) On pose : } u(x) = \ln(1+e^x) \text{ et } v'(x) = e^x, \text{ d'où } u'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \text{ et } v(x) = e^x.$$

$$\text{Par conséquent : } J = \left[ e^x \ln(1+e^x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \text{ soit : } J = e \ln(1+e) - \ln 2 - I.$$

Finalement, on trouve :  $J = e \ln(1+e) - \ln 2 - e + 1 + \ln(1+e) - \ln 2$  ou encore :

$$J = (e+1) \ln(1+e) + 1 - e - 2 \ln 2.$$

### EXERCICE 3

1<sup>o</sup>) La somme des probabilités  $p_i$  est égale à 1, donc en les exprimant toutes en fonction de  $p_1$ ,

$$\text{on obtient : } p_1 + p_1 + 3 p_1 + 2 p_1 + 2 p_1 + 6 p_1 = 1 \Rightarrow 15 p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{15}.$$

$$\text{Par suite : } p_2 = \frac{1}{15}; p_3 = \frac{1}{5}; p_4 = \frac{2}{15}; p_5 = \frac{2}{15}; p_6 = \frac{2}{5}.$$

2°) C'est :  $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{3}{5}$  .

3°) On a affaire à un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et  $\frac{3}{5}$  . La probabilité d'avoir k

succès est :  $C_5^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k}$  . La probabilité d'avoir au moins 4 succès (c'est-à-dire 4 ou 5)

est donc :  $C_5^4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{810}{3125} + \frac{243}{3125} = \frac{1053}{3125} = \mathbf{0,33696}$  .

**EXERCICE 4**

1°) a) Le discriminant réduit est  $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$  . les solutions sont donc :

$$z_1 = 1 - i \text{ et } z_2 = 1 + i .$$

Sous forme trigonométrique  $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$  et  $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$  .

b) Posons  $Z = -iz + 3i + 3$  . Alors la seconde équation équivaut à :  $Z^2 - 2Z + 3 = 0$  . Elle a donc les mêmes racines que l'équation du a) . D'où :  $Z = 1 - i$  ou  $Z = 1 + i$  . Soit :

$$-iz + 3i + 3 = 1 - i \text{ ou } -iz + 3i + 3 = 1 + i . \text{ Donc } iz = 2 + 4i \text{ ou } iz = 2 + 2i .$$

On obtient les solutions  $z_3 = 4 - 2i$  et  $z_4 = 2 - 2i$  .

2°) On a  $z_B - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}} (z_A - \omega)$  en désignant par  $\omega$  l'affixe du centre. D'où :

$$\omega \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = z_B - e^{-i\frac{\pi}{2}} z_A , \text{ soit } \omega = \frac{1 - i + i(1 + i)}{1 + i} = 0 .$$

Le centre de la rotation est donc le point O.

Commentaire : Sujet très facile que même l'élève le plus moyen devrait pouvoir rédiger sans problème .

## EXERCICE 1

$$1^\circ) \text{ a) } U_n = U_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n . \quad V_n = V_0 + n \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} .$$

$$\text{b) } z_n = U_n e^{iV_n} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \exp\left[i\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] .$$

2°)  $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{U_{n+1}}{U_n} \exp[i(V_{n+1} - V_n)] = \frac{1}{2} \exp[i\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} i$ . Donc  $(z_n)$  est une suite géométrique complexe de raison  $\frac{1}{2} i$ . Son premier terme est

$$z_0 = U_0 e^{iV_0} = 4 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + i 2\sqrt{2} .$$

3°) a) On a :  $z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$  donc la transformation complexe associée à F est :  $z \mapsto \frac{1}{2} i z$ .

Comme cette écriture est de la forme :  $z \mapsto az + b$ , F est une **similitude directe**.

b) Le centre de cette similitude est **O**, son rapport  $\left|\frac{1}{2} i\right| = \frac{1}{2}$  et son angle  $\arg\left(\frac{1}{2} i\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

$$4^\circ) \text{ a) } \arg(z_n) = \arg z_0 + \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n = \sum_{k=0}^n \arg(z_k) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n k = \frac{(n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^2 \pi}{4} .$$

b) Si n est impair, posons  $n = 2p - 1$  (avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ). Alors,  $(n+1)^2 = 4p^2$  et par suite :  $\frac{(n+1)^2 \pi}{4} = p^2 \pi$ , est un multiple de  $\pi$ . Il en résulte que :  $z_n$ , nombre complexe dont un argument est un multiple de  $\pi$ , est un **réel** (et même un réel positif !)

## EXERCICE 2

$$1^\circ) p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30} .$$

2°) a) L'ensemble des valeurs de X est :  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ .

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6} . \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2} . \quad P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10} .$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30} . \quad \text{On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau :}$$

<b>X<sub>i</sub></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>P(X = X<sub>i</sub>)</b>	<b><math>\frac{1}{6}</math></b>	<b><math>\frac{1}{2}</math></b>	<b><math>\frac{3}{10}</math></b>	<b><math>\frac{1}{30}</math></b>

$$\text{b) } E(X) = \left(0 \times \frac{1}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(3 \times \frac{1}{30}\right) = \frac{6}{5} = \mathbf{1,2}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left[ \left(0^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2^2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{30}\right) \right] - \frac{36}{25} = \frac{14}{25}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{14}}{5} \approx 0,748.$$

3°) On a affaire à un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et  $\frac{1}{30}$ . La probabilité d'avoir 3

$$\text{succès est : } C_5^3 \left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(\frac{29}{30}\right)^2 \approx \mathbf{3,46 \times 10^{-4}}.$$

### PROBLEME

1°)  $f(x)$  existe si et seulement si  $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .  $D_f = \mathbf{R \setminus \{0\}} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

Par réduction au même dénominateur, on a :  $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{(ax + b)e^x - ax - b + c}{e^x - 1}$ ,

d'où par identification :  $\mathbf{a = 2 ; b = -1 ; c = 1}$ .

Ainsi,  $\forall x \in D_f, f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$  (\*)

2°)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{-\infty}$  car :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{-\infty}$  car :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$  (en effet,  $e^x < 1$  si  $x < 0$ ).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{+\infty}$  car :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 1) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$  (en effet,  $e^x > 1$  si  $x > 0$ ).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{+\infty}$  car :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$ .

3°) a)  $f$  est dérivable sur  $D_f$  comme quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} \text{ (on a dérivé à partir de l'écriture (*)).}$$

b) En posant  $e^x = X$ , l'équation équivaut à :  $2X^2 - 5X + 2 = 0$ , d'où  $X = 2$  ou  $X = \frac{1}{2}$ , soit

$$e^x = 2 \text{ ou } e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ ou } x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2. \mathbf{S = \{ \ln 2 ; -\ln 2 \}}.$$

c)  $f'(x)$  est du signe de son numérateur  $2e^{2x} - 5e^x + 2$ . Résolvons :  $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$ .

En posant  $e^x = X$ , cette inéquation équivaut à :  $2X^2 - 5X + 2 > 0$ , d'où :

$$X \in ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]2; +\infty[ \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \text{ ou } e^x > 2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\ln 2[ \cup ] \ln 2; +\infty[.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
---	-----------	----------	---	---------	-----------

$f'(x)$	+	-	-	+
$f$				

$$M = f(-\ln 2) = -2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{e^{-\ln 2} - 1} = -2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = -3 - 2 \ln 2.$$

$$M' = f(\ln 2) = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{e^{\ln 2} - 1} = 2 \ln 2.$$

Pour ces calculs, nous avons utilisé l'expression (\*) de  $f(x)$ .

4°)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$  (d'après (\*)) donc la droite d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $+\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} + 1 = 0$  (d'après (\*)) donc la droite d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $-\infty$ .

Une autre asymptote est la droite d'équation  $x = 0$ , car :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

5°)  $\Omega$  a pour coordonnées :

$$x_\Omega = \frac{x - x}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_\Omega = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2} \left( 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} - 2x - 1 + \frac{1}{e^{-x} - 1} \right) \\ = \frac{1}{2} \left( -2 + \frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{1 - e^x} \right) = \frac{1}{2} \left( -2 + \frac{1 - e^x}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2} (-2 - 1) = -\frac{3}{2}.$$

Ainsi les points M et M' sont symétriques par rapport à  $\Omega$ . Il en résulte que :  $\Omega \left( 0 ; \frac{3}{2} \right)$  est un **centre de symétrie pour la courbe  $\mathcal{C}$** .

6°) Voir la courbe ci-dessous.

7°) a) Par réduction au même dénominateur, on a :

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{(2x + \alpha)(e^x - 1) + \beta e^x}{e^x - 1} = \frac{(2x + \alpha + \beta)e^x - \alpha}{e^x - 1} \text{ d'où par identification :}$$

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{et} \quad -\alpha = 2, \text{ soit } \alpha = -2 \text{ et } \beta = 1.$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in D_f, f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1} (**).$$

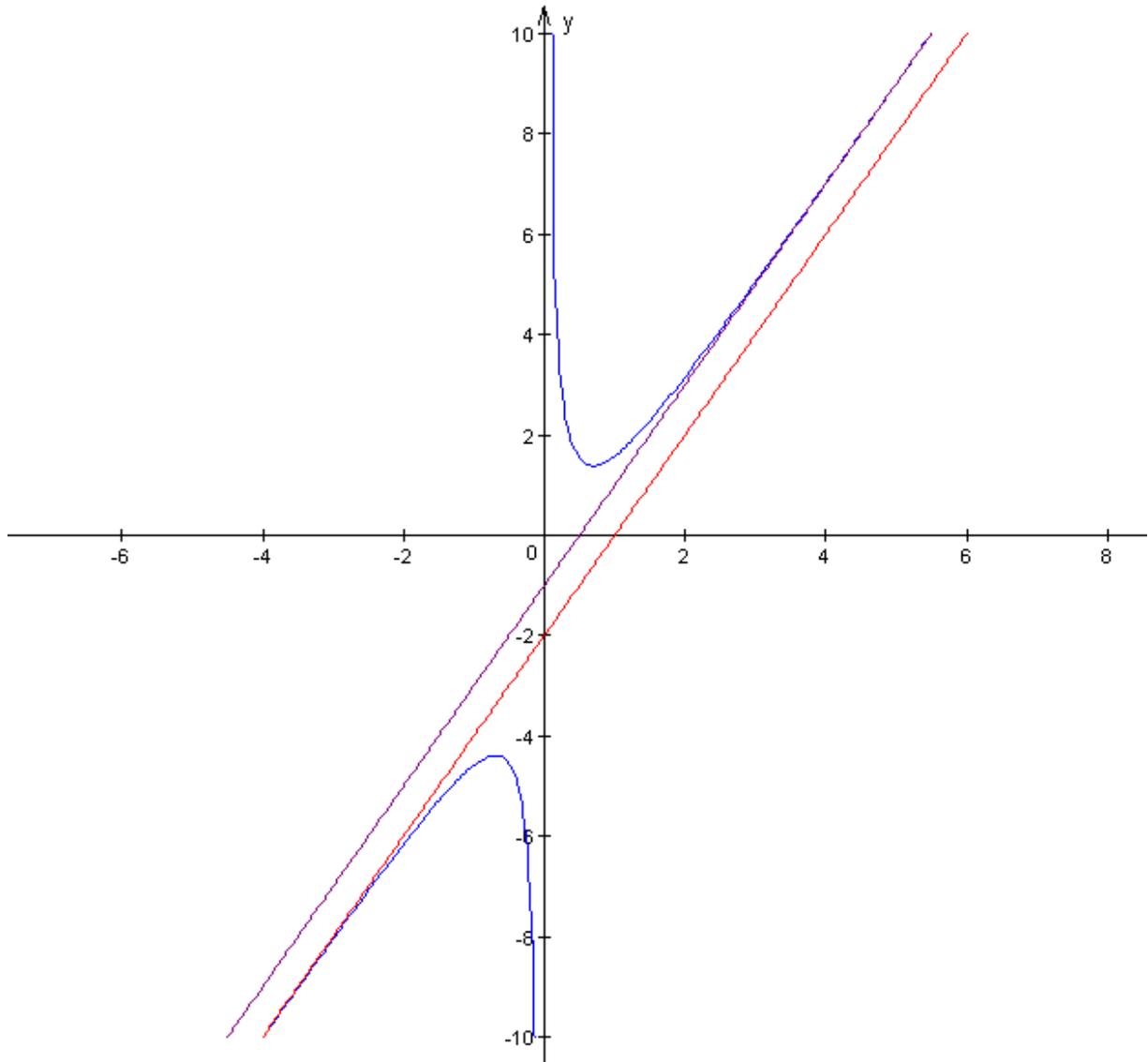
$$\text{b) } \mathcal{A}(k) = \int_{\ln 2}^{\ln k} [f(x) - (2x - 1)] dx = \int_{\ln 2}^{\ln k} -1 + \frac{e^x}{e^x - 1} dx \text{ (d'après (**)) , d'où :}$$

$$\mathcal{A}(k) = \left[ -x + \ln(e^x - 1) \right]_{\ln 2}^{\ln k} = -\ln k + \ln(k - 1) + \ln 2 - \ln 1 = \ln \frac{2(k - 1)}{k} \text{ u. a.}$$

$$\text{En cm}^2, \text{ on obtient : } \mathcal{A}(k) = 4 \ln \frac{2(k - 1)}{k} \text{ cm}^2.$$

$$\text{c) } \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 4 \ln \frac{2(k - 1)}{k} = 4 \ln 2 \text{ car : } \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln \frac{2(k - 1)}{k} = \ln 2.$$

6°)



Commentaires : Pour l'exercice 1, il fallait se souvenir de :

- un nombre complexe est réel si et seulement si son argument est un multiple de  $\pi$ .
- L'argument du produit d'un nombre fini de nombres complexes est égal à la somme de leurs arguments.

Pour le problème, on peut remarquer que le sens de variation de  $f$  se déduit de la résolution de l'inéquation  $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$  et non de celle de l'équation  $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ , comme semble le suggérer l'énoncé.

C'est un sujet très classique, exigeant d'avoir de bonnes connaissances sur tout le programme.

## BAC S2 2003 1<sup>er</sup> groupe . SOLUTION

### EXERCICE 1

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$p(M) = 0,005 ; \quad p(T | M) = 0,8 ; \quad p(\bar{T} | \bar{M}) = 0,9 .$$

1° a) En substituant T et M, puis  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  dans la relation (\*), on obtient :

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M}) . \quad \bar{M} = (\bar{M} \cap \bar{T}) \cup (\bar{M} \cap T) \text{ car } \overline{\bar{T}} = T .$$

b) De la deuxième égalité, on déduit que :  $p(\bar{M}) = p(\bar{M} \cap \bar{T}) + p(\bar{M} \cap T)$ , car  $\bar{M} \cap \bar{T}$  et  $\bar{M} \cap T$  constituent une partition de  $\bar{M}$ .

Par suite :  $p(\bar{M} \cap T) = p(\bar{M}) - p(\bar{M} \cap \bar{T}) = p(\bar{M}) - p(\bar{T} | \bar{M}) p(\bar{M})$ , par définition de la probabilité conditionnelle  $p(\bar{T} | \bar{M})$ .

Il en résulte que :  $p(\bar{M} \cap T) = p(\bar{M})(1 - p(\bar{T} | \bar{M}))$ .

2°)  $p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \bar{M})$  d'après la première des égalités du 1° a).

D'où :  $p(T) = p(T | M) \times p(M) + p(\bar{M})(1 - p(\bar{T} | \bar{M}))$  d'après 1° b).

$$p(T) = 0,8 \times 0,005 + (1 - 0,005)(1 - 0,9) = 0,004 + 0,995 \times 0,1 = 0,1035 = \frac{207}{2000} .$$

3° a)  $p(T | M) = 0,8 \Rightarrow \frac{p(T \cap M)}{p(M)} = 0,8 \Rightarrow p(T \cap M) = 0,8 \times 0,005 = 0,004$ .

$$P(M | T) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,004}{0,1035} = \frac{8}{207} .$$

b)  $p(\bar{T} | M) = 1 - p(T | M) = 1 - 0,8 = 0,2 = \frac{1}{5}$ .

### EXERCICE 2

1° a) Soit  $ib$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) une solution imaginaire pure de (E). On a nécessairement :

$$(ib)^3 + (1 - 8i)(ib)^2 - (23 + 4i)(ib) - 3 + 24i = 0 , \text{ soit :}$$

$$-b^2 + 4b - 3 + i(-b^3 + 8b^2 - 23b + 24) = 0 , \text{ ce qui équivaut au système:}$$

$$\begin{cases} -b^2 + 4b - 3 = 0 & (1) \\ -b^3 + 8b^2 - 23b + 24 = 0 & (2) . \end{cases}$$

(1) a pour solutions 1 et 3. Seul 3 est solution de (2). Ainsi, on a nécessairement :  $b = 3$ , d'où l'on déduit que (E) admet la solution imaginaire pure  $3i$ .

b) On utilise la méthode de Hörner :

	1	1 - 8i	-(23 + 4i)	-3 + 24i
1 + 2i		1 + 2i	14 - 2i	3 - 24i
	1	2 - 6i	-9 - 6i	0

Donc 1 + 2i est solution de (E).

	1	1 - 8i	-(23 + 4i)	-3 + 24i
--	---	--------	------------	----------

$-2 + 3i$		$-2 + 3i$	$17 + 7i$	$3 - 24i$
	1	$-1 - 5i$	$-6 + 3i$	0

Donc  $-2 + 3i$  est solution de (E).

c) Il résulte de a) et b) que l'ensemble des solutions de (E) est :  $S = \{ 3i ; 1 + 2i ; -2 + 3i \}$ .

2°) a) On a  $2\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ . Désignons par  $z_A, z_B, z_C, z_G$  les affixes respectives de A, B, C et G. En termes d'affixes, la relation précédente se traduit par :

$$2(z_A - z_G) - 2(z_B - z_G) + (z_C - z_G) = 0 \Leftrightarrow -z_G + 2z_A - 2z_B + z_C = 0 \text{ soit :}$$

$$z_G = 2z_A - 2z_B + z_C = 2(1 + 2i) - 2(3i) - 2 + 3i = i.$$

Ainsi, le vecteur  $\vec{GA}$  a pour affixe  $z_A - z_G = 1 + 2i - i = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

$\vec{GB}$  a pour affixe  $z_B - z_G = 3i - i = 2i$ .

Et  $\vec{GC}$  a pour affixe  $z_C - z_G = -2 + 3i - i = -2 + 2i = 2(-1 + i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ .

On constate facilement que les affixes de  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  forment dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

b) D'après la question précédente,

$$(z_B - z_G) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_G) \text{ et } (z_C - z_G) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B - z_G), \text{ donc on a aussi :}$$

$$(z_G - z_B) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_G - z_A) \text{ et } (z_G - z_C) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_G - z_B), \text{ en multipliant par } -1 \text{ les deux membres de chaque égalité. On en déduit que :}$$

**La similitude directe de centre G, de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  transforme A en B et B en C.**

## PROBLEME

### Partie A

1°)  $u(x)$  est défini si et seulement si :  $x \geq 0$  (en effet,  $x$  doit être dans l'ensemble de départ de  $u$ ),  $x \neq 1$  (l'expression à l'intérieur de la valeur absolue doit être définie) et enfin

$x^2 - 1 \neq 0$  (l'expression  $\frac{2x}{x^2 - 1}$  doit être définie). Il en résulte que  $Du = [0 ; 1[ \cup ] 1 ; +\infty [$ .

On trouve facilement :  $u(0) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 1 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0.$$

2°) La fonction  $x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$  est dérivable sur  $D_u$  comme composée de trois fonctions

dérivables. Sa fonction dérivée est :  $x \mapsto \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$ .

La fonction  $x \mapsto -\frac{2x}{x^2-1}$  est dérivable sur  $D_u$  comme fonction rationnelle. Sa fonction

dérivée est :  $x \mapsto \frac{-2(x^2-1)+4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$

Par conséquent,  $u$  est dérivable sur  $D_u$  comme somme de deux fonctions dérivables et

$\forall x \in D_u, u'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)+2x^2+2}{(x^2-1)^2}$ .

Soit :  $u'(x) = \frac{4}{(x^2-1)^2}$ . Donc  $u'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_u$ .

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+		+
u	0		0

3°) Il résulte immédiatement du tableau précédent que :

a)  $u$  est croissante sur  $[0; 1[$  et sa valeur minimale est 0, donc  **$u$  est positive sur  $[0; 1[$** .

b)  $u$  est croissante sur  $]1; +\infty[$  et tend vers 0 en  $+\infty$ , donc  **$u$  est négative sur  $]1; +\infty[$** .

### Partie B

1°)  $g(x)$  existe si et seulement si  $\frac{x+1}{x-1}$  existe et est différent de 0 c'est-à-dire  $x \neq 1$  et  $x \neq -$

1. Comme  $x$  est dans  $]0; +\infty[$ , il en résulte que  **$D_g = [0; 1[ \cup ]1; +\infty[$** .

$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \left\langle \frac{2}{0^+} \right\rangle = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = +\infty$  d'où l'on déduit que :  **$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$** .

2°) a) On vérifie trivialement en réduisant au même dénominateur le second membre que :

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \quad (*)$$

Posons  $X = \frac{2}{x-1}$ . Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $X$  tend vers 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

b) D'après (\*), on peut donc dire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = 1$ .

Or, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{x+1}{x-1}$  est positif et par conséquent  $g(x) = x \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) - 1$ .

Donc la limite précédente s'écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)+1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \right) = 1$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$ . Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)+1}{2} = 1$  d'où l'on tire que :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + 1 = 2$  et par suite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ .

Interprétation géométrique : **la courbe  $\mathcal{E}_g$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$ .**

c)  $g$  est dérivable sur  $D_g$  comme composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in D_g, g'(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + x \times \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \text{ (d'après les calculs du 2° partie A).}$$

Après réduction, on obtient :  $g'(x) = u(x)$ .

Le signe de la dérivée de  $g$  est donc déterminé par les conclusions du 3° partie A.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g$	-1	$+\infty$	1

d)  $g$  est continue et strictement croissante, donc bijective de  $]0;1[$  vers  $] -1; +\infty [$ . Or, 0 est un élément de  $] -1; +\infty [$ . Donc 0 a un antécédent unique par  $g$  : en d'autres termes, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0;1[$ .

On a :  $g(0,6) \simeq -0,168$  ;  $g(0,7) \simeq 0,214$ . Donc :  $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$ .

3°) Voir ci-dessous.

### Partie C

1°)  $f$  est dérivable sur  $[0;1[$  comme produit de deux fonctions :

- $u : x \mapsto x^2 - 1$  dérivable sur  $[0;1[$  comme fonction polynôme.
- $v : x \mapsto \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$  dérivable sur  $[0;1[$  comme composée de fonctions dérivables.

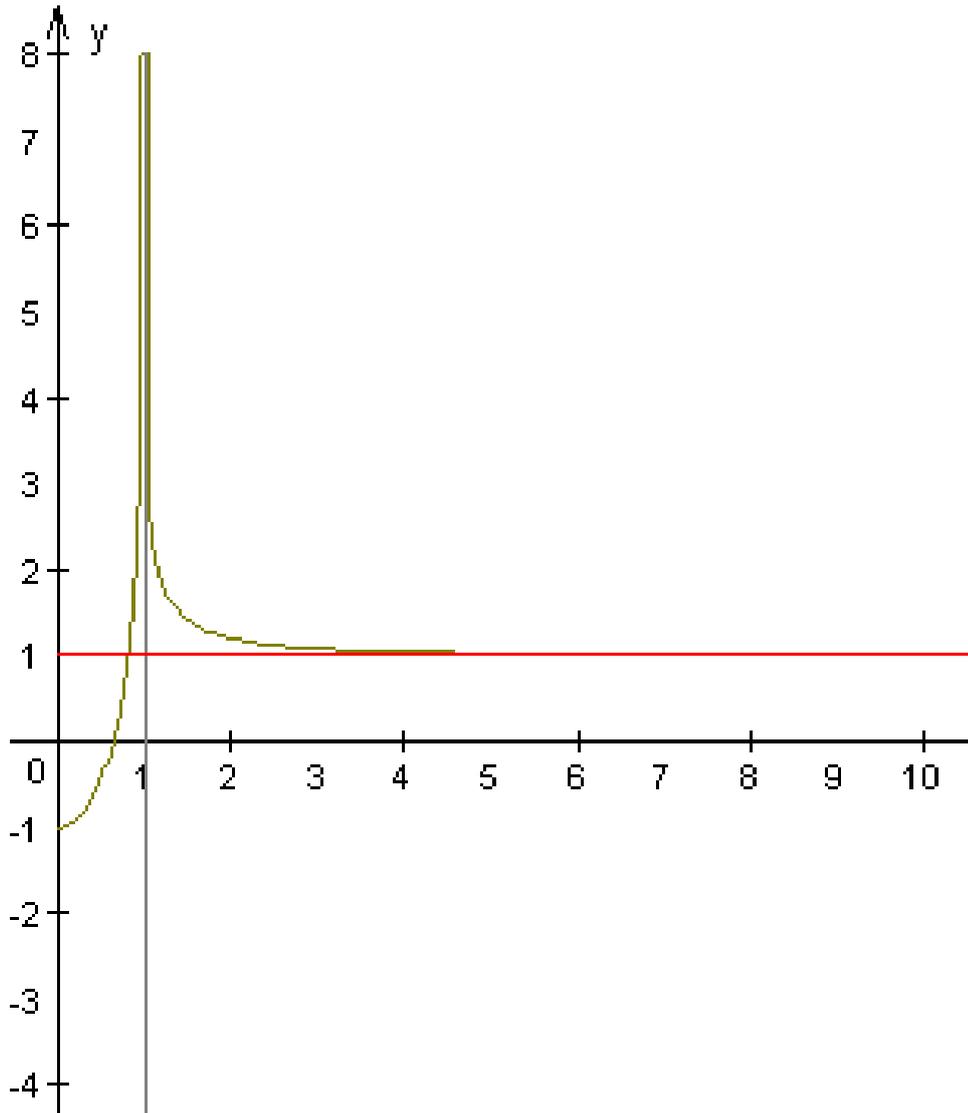
$$\forall x \in [0;1[, f'(x) = 2x \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + (x^2 - 1) \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \times \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

Explication de ce calcul : on a  $f = uv$ , donc  $f' = u'v + uv'$ ; et  $v = \ln \sqrt{w}$  ( $w$  étant la

$$\text{fonction } x \mapsto \frac{x+1}{1-x}) \text{ donc } v' = \frac{(\sqrt{w})'}{\sqrt{w}} = \frac{w'}{2\sqrt{w}} \times \frac{1}{\sqrt{w}}.$$

$$\text{En calculant, on trouve } f'(x) = 2x \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + (x^2 - 1) \times \frac{1}{(1-x)(1+x)},$$

$$\text{Soit } f'(x) = x \ln \left( \frac{x+1}{1-x} \right) - 1 = g(x) \quad \forall x \in [0;1[ \text{ . } \left( \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{1-x} \right) \right).$$



3°) Cette aire vaut  $-\int_0^{\alpha} g(x)dx = -[f(x)]_0^{\alpha} = f(0) - f(\alpha) = -f(\alpha)$   
 $= (\alpha^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha}}$  u.a . En  $\text{cm}^2$  , cette aire vaut  $4(\alpha^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha}}$  .

### EXERCICE 1

Il faut faire une double intégration par parties :

On pose d'abord :  $u(x) = 2x^2 - 1$  et  $v'(x) = \cos 3x$  d'où :  $u'(x) = 4x$  et  $v(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ .

$$\text{D'où : } I = \left[ \frac{1}{3} (2x^2 - 1) \sin 3x \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{4}{3} x \sin 3x dx = - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{4}{3} x \sin 3x dx .$$

Intégrons une deuxième fois par parties en posant :

$u(x) = \frac{4}{3} x$  et  $v'(x) = \sin 3x$  d'où :  $u'(x) = \frac{4}{3}$  et  $v(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x$ .

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{4}{3} x \sin 3x dx = \left[ -\frac{4}{9} x \cos 3x \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \frac{4}{9} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos 3x dx = \frac{4}{9} \pi + \frac{4\pi}{27} .$$

$$\text{Donc finalement : } I = -\frac{4}{9} \pi - \frac{4\pi}{27}$$

### EXERCICE 2

$$1^\circ) z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] .$$

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}{2} .$$

En comparant les deux écritures, on obtient :

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} .$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} .$$

$$2^\circ) \text{ Posons } Z = (iz - 2) (\bar{z} - 1) = i(z + 2i) \overline{(z - 1)} .$$

Soit A le point d'affixe  $-2i$  et B le point d'affixe 1.

$$\text{Alors, } \arg Z = \frac{\pi}{2} + \arg(z + 2i) - \arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} + (\vec{BM}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{MB}, \vec{MA})$$

Le complexe Z est réel si et seulement si :  $\arg Z$  est un multiple de  $\pi$ , c'est-à-dire si et

seulement si :  $\frac{\pi}{2} + (\vec{MB}, \vec{MA}) = k\pi \Leftrightarrow (\vec{MB}, \vec{MA}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \mathbf{M}$  appartient au cercle  $E_1$  de diamètre [AB] (privé des points A et B). (cf. figure 1).

3°) Avec les mêmes notations qu'au 2°, Z est imaginaire pur si et seulement si :  $\arg Z$  est un multiple de  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire si et seulement si :

$$\frac{\pi}{2} + (\vec{MB}, \vec{MA}) = k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\vec{MB}, \vec{MA}) = \frac{(k-1)\pi}{2} .$$

Si k est pair, cela signifie que  $(\vec{MB}, \vec{MA})$  est un multiple impair de  $\frac{\pi}{2}$ , donc que M est sur le cercle de diamètre [AB] (privé des points A et B).

Si  $k$  est impair, cela signifie que  $(\vec{MB}, \vec{MA})$  est un multiple pair de  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire un multiple de  $\pi$ , donc que  $M$  est sur la droite  $(AB)$  privée des points  $A$  et  $B$ .

**L'ensemble  $E_2$  est donc la réunion du demi-cercle de diamètre  $[AB]$  et de la droite  $[AB]$  privée des points  $A$  et  $B$ .** (cf. figure 2).

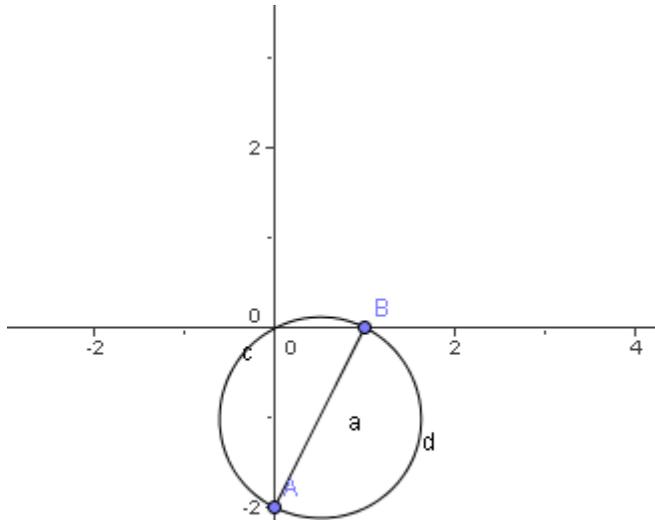


Figure 1

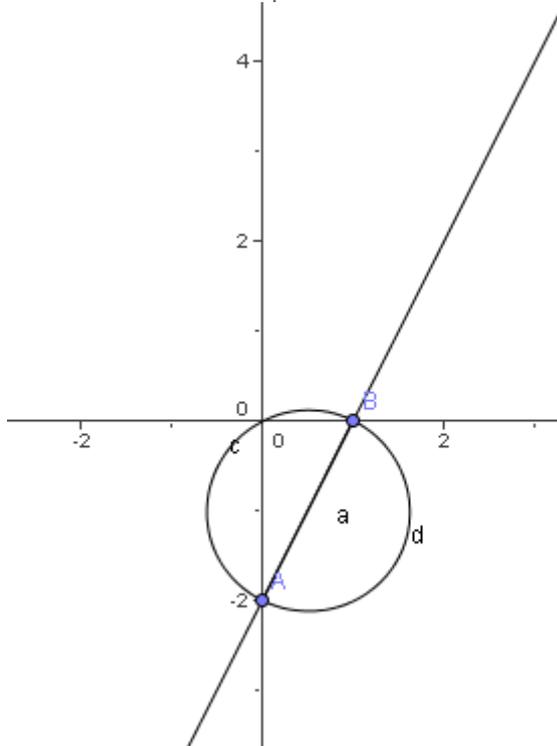


Figure 2

### EXERCICE 3

1°) a) C'est la probabilité d'obtenir trois S (parmi 3), deux E (parmi 3) un A (parmi 2) et un G (parmi 1) lors d'un tirage simultané de 7 lettres d'un sac en contenant 12 (3 S, 3 E, 1 N, 1 G, 2 A, 1 L, 1 I).

Le nombre de cas favorables est :  $C_3^3 \times C_3^2 \times C_2^1 \times C_1^1 = 6$ .

Le nombre de cas possibles est :  $C_{12}^7 = 792$  (chaque tirage est une combinaison à 7 éléments dans un ensemble à 12 éléments).

la probabilité cherchée est donc :  $p_1 = \frac{6}{792} = \frac{1}{132} \approx 0,007$ .

b) C'est la probabilité d'obtenir le mot « SAGESSE » ou l'un des anagrammes de ce mot lors de 7 tirages successifs avec remise d'une lettre dans une urne ayant la composition précédemment décrite.

La probabilité d'obtenir le mot « SAGESSE » lui-même est (tirages indépendants) :

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{2 \times 3^5}{12^7} = \frac{1}{73728}$$

Ce mot ayant  $\frac{7!}{3! \times 2!} = 420$  anagrammes, la probabilité d'obtenir les lettres du mot

« SAGESSE » est :  $p_2 = \frac{420}{73728} = \frac{35}{6144} \approx 5,7 \times 10^{-3}$ .

2°) Nombre de cas favorables :  $3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 72$  : (en effet, au premier tirage, on a 3 possibilités d'obtenir un S, puisqu'on n'a encore rien tiré ; au deuxième tirage, on a 2 possibilités d'obtenir un A puisqu'on n'a pas encore tiré de A, au troisième tirage, on a 1 possibilité d'obtenir la seule lettre G, au quatrième tirage, on a 3 possibilités d'obtenir la lettre E, au cinquième tirage, on a 2 possibilités d'obtenir un S, car on en a déjà tiré un ; au sixième tirage, on a 1 possibilité d'obtenir le dernier S, et enfin au septième et dernier tirage, on a 2 possibilités d'obtenir un E, puisqu'on a déjà tiré un E sur les 3.)

Nombre de cas possibles :  $A_{12}^7 = 3\,991\,680$  car chaque tirage est un arrangement à 7 éléments de l'ensemble des douze jetons.

La probabilité cherchée est donc :  $p_3 = \frac{72}{3\,991\,680} = \frac{1}{55440} \approx 1,8 \times 10^{-5}$ .

#### **EXERCICE 4**

1°)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$ , d'où :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(1 + e^x) = 0$  (1).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  (2). (1) et (2) entraînent que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

2°) La vérification est immédiate puisque  $e^x \times e^{-x} = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1 + e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln[e^x(1 + e^{-x})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1 + e^{-x})$ ,

d'où l'on déduit que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1 + e^x) = 0$  car :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ .

3°)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(1 + e^x) = -\ln 1 = 0$ .

donc la droite **D** d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ .

4°)  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme somme et composée de fonctions continues et dérivables sur  $\mathbf{R}$ .  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$ .  $f'(x)$  étant strictement positive,

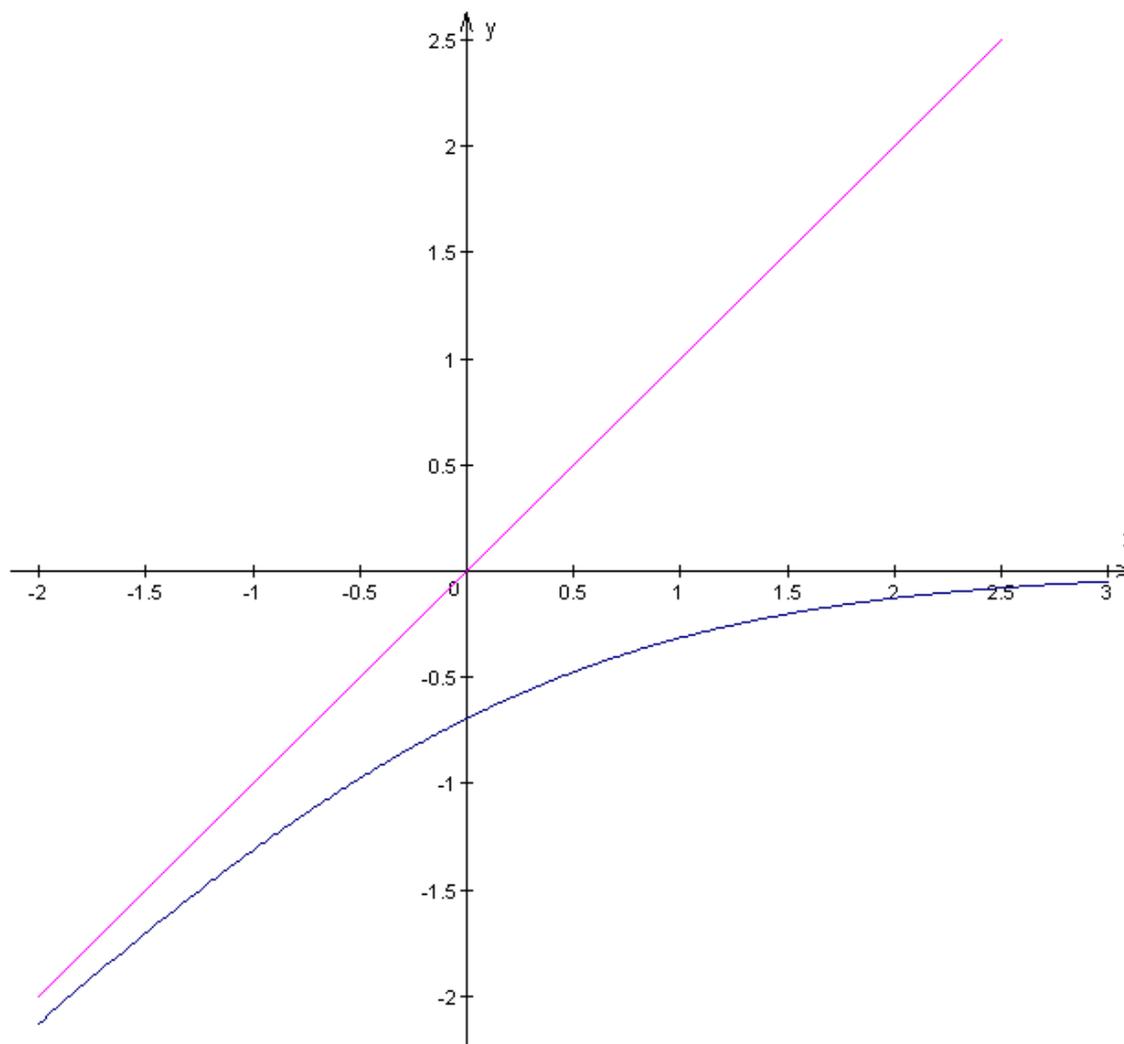
on peut dire que  $f$  est continue et strictement monotone (croissante), donc bijective sur  $\mathbf{R}$ .

$$f(0) = -\ln 2 \Rightarrow f^{-1}(-\ln 2) = 0.$$

D'après le théorème de la dérivation d'une fonction réciproque,  $(f^{-1})'(-\ln 2) = \frac{1}{f'(0)} = 2$ .

5°) Voir ci-dessous.

Commentaire : Sujet assez complexe et comportant parfois des calculs assez longs. Il est quasiment impossible, à notre avis, qu'un élève moyen le rédige entièrement en 2 heures !



## BAC S2 2002 1<sup>er</sup> groupe . SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) Les racines n<sup>ièmes</sup> de l'unité sont, d'après le cours, les nombres de la forme  $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ). Leur somme  $1 + e^{\frac{i2\pi}{n}} + e^{\frac{i4\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{i2k\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}$  est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $e^{\frac{i2\pi}{n}}$ . Cette somme est donc égale à :

$$1 \times \frac{1 - \left( e^{\frac{i2\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{i2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{n}}} = 0 \text{ car } e^{i2\pi} = 1 .$$

2°) Prenons  $n = 5$ . D'après 1), on a donc :  $1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{i6\pi}{5}} + e^{\frac{i8\pi}{5}} = 0$ . La partie réelle de cette somme ( $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$ ) est, par conséquent nulle .

$$\text{Or, } \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \left( \frac{10\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \left( 2\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \left( -\frac{2\pi}{5} \right) = \cos \left( \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$\text{et } \cos \frac{6\pi}{5} = \cos \left( \frac{10\pi}{5} - \frac{4\pi}{5} \right) = \cos \left( 2\pi - \frac{4\pi}{5} \right) = \cos \left( -\frac{4\pi}{5} \right) = \cos \left( \frac{4\pi}{5} \right) .$$

La partie réelle de la somme  $1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{i6\pi}{5}} + e^{\frac{i8\pi}{5}}$  se réduit donc à :

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} .$$

Mais :  $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1$  (en vertu de la formule  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  (\*) )

et  $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$  (car  $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ ) . Il vient donc :

$$1 + 2 \left( 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 \right) - 2 \cos \frac{\pi}{5} = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0 .$$

Ainsi, en posant  $X = \cos \frac{\pi}{5}$ , on voit que :

$\cos \frac{\pi}{5}$  est solution de l'équation  $4X^2 - 2X - 1 = 0$ .

3°) L'équation  $4X^2 - 2X - 1 = 0$  a pour solutions  $\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$  et  $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ . Comme  $\frac{\pi}{5}$  est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{5}$  est positif, donc nécessairement  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

On en déduit que :  $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 - 1 = 2 \left( \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} \right) - 1 = \frac{-4 + 4\sqrt{5}}{16}$ ,

soit :  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

et  $\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}{2}$  (d'après la formule (\*)).

Donc  $\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$  et comme  $\cos \frac{\pi}{10} > 0$ , on en déduit que :  $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$ .

## EXERCICE 2

1°)  $z_1$  est la moyenne des notes de Mathématiques de ceux qui ont obtenu  $x_1 = 6$  en Sciences Physiques. Ainsi  $z_1 = \frac{(4 \times 2) + (2 \times 6) + (1 \times 10) + (0 \times 14) + (0 \times 18)}{7} \Rightarrow z_1 = \frac{30}{7}$ .

De manière analogue, on obtient :  $z_2 = 6$  ;  $z_3 = \frac{286}{29}$  ;  $z_4 = \frac{162}{13}$  ;  $z_5 = \frac{74}{5}$ .

2°) On obtient d'après les valeurs de  $z_i$  trouvées au 1) le tableau de la série statistique  $(x_i, z_i)$

$x_i$	6	8	10	12	14
$z_i$	$\frac{30}{7}$	6	$\frac{286}{29}$	$\frac{162}{13}$	$\frac{74}{5}$

a) Voir ci-dessous.

$$\text{b) } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{6 + 8 + 10 + 12 + 14}{5} = \underline{10} ; \quad \bar{z} = \frac{\frac{30}{7} + 6 + \frac{286}{29} + \frac{162}{13} + \frac{74}{5}}{5} = \underline{9,51}$$

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5} - \bar{x}^2 = \underline{8} \Rightarrow \sigma_x = \underline{2\sqrt{2}} ;$$

$$V(z) = \frac{\sum_{i=1}^5 z_i^2}{5} - \bar{z}^2 = \underline{15,3} \Rightarrow \sigma_z = \sqrt{15,3} \simeq \underline{3,91} ;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \text{cov}(x, z) &= \frac{\sum_{i=1}^5 x_i z_i}{5} - \bar{x} \times \bar{z} \\ &= \frac{(6 \times \frac{30}{7}) + (8 \times 6) + (10 \times \frac{286}{29}) + (12 \times \frac{162}{13}) + (14 \times \frac{74}{5})}{5} - (10 \times 9,51) \simeq \underline{11,02} \end{aligned}$$

D'après ces calculs, le coefficient de corrélation linéaire est égal à :

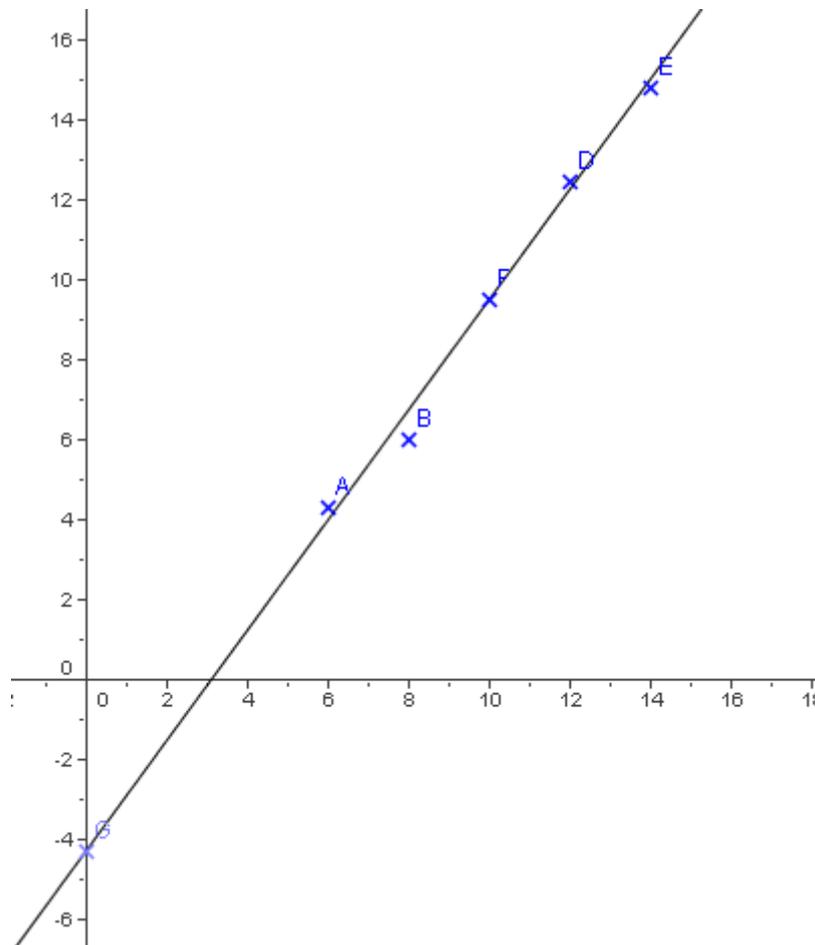
$$r = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x \times \sigma_z} = \frac{11,02}{2\sqrt{2} \times 3,91} \text{ soit } r \approx 0,99 .$$

c) Une équation de  $D_{z/x}$  est  $z - \bar{z} = a(x - \bar{x})$  avec  $a = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x^2} \approx \frac{11,02}{2\sqrt{2}} \approx 1,35$  .

Après remplacement des expressions par leurs valeurs numériques, on obtient :

$$D_{z/x} : z = 1,25 x - 4,29 .$$

d) Voir ci-dessous .



## PROBLEME

### Partie A

1°)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} = 0^2 = 0$  .

Il en résulte que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$  . Donc g est continue à droite en 0 .

2°) D'après l'énoncé même :  $Dg = ]0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$  .



Signe de  $\ln x$  autour de 1 : \_\_\_\_\_

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln^2 x} = \ll \frac{1}{0^+} \gg = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{\ln x} = \ll \frac{-1}{0^-} \gg = +\infty$$

Il en résulte que :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} \left( \frac{1}{\ln x} - 1 \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \ll \frac{1}{0^+} \gg = +\infty,$$

Il en résulte que :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^2 x} = 0^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

$g$  est dérivable sur  $D_g$  comme somme de deux fonctions qui sont des inverses de fonctions

$$\text{dérivables. } \forall x \in D_g, g'(x) = -2(\ln x)^{-3} \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-2 + \ln x}{x(\ln x)^3}.$$

$g'(x)$  est du signe de  $Q = \frac{-2 + \ln x}{\ln x}$ . Faisons un tableau de signe de cette expression :

x	0	1	1	e	e	e <sup>2</sup>	e <sup>2</sup>	+∞
-2 + ln x	-			-	-		+	
ln x	-			+	+		+	
Q	+			-	-		+	

Tableau de variation de  $g$  :

x	0	1	e	e <sup>2</sup>	+∞
g(x)	+		-		+
g	0 ↗ +∞	∥	+∞ ↘ -1/4		0 ↗

On vérifie que  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ . Ainsi, d'après le tableau ci-dessus :

- $g(x)$  est positive si  $x \in [0; 1[ \cup ]1; e]$ .
- $g(x)$  est négative si  $x \in [e; +\infty[$ .

### Partie B

$$1^\circ) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \text{ Donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \times \frac{1}{\ln x} = 0 : \underline{\text{f est donc continue à droite en 0.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln x} = 0 :$$

f est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0$ .

Il en résulte que C, courbe représentative de f, admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale (de coefficient directeur 0).

2°) On vient de voir que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ll \frac{-1}{0^-} \gg = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ll \frac{-1}{0^+} \gg = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \frac{\ln x}{x} \text{ est positif au voisinage de } +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

3°) f est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{-\ln x + x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \text{ (dérivation d'un quotient), soit } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(\ln x)^2}.$$

On a aussi :  $f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} = g(x)$ .

Ainsi f'(x) est du signe de g(x). Le signe de f'(x) découle donc des conclusions du 2° de la partie A.

x	0	1	e	+∞
f(x)	+		+	-
f	0 ↗	+∞	-∞ ↗	-∞ ↘

4°)  $f(e^2) = \frac{-e^2}{2}$ .  $f'(e^2) = -\frac{1}{4}$ . L'équation de la tangente au point d'abscisse  $e^2$  est :

$$y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2) \text{ soit : } y = -\frac{1}{4}(x - e^2) - \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{e^2}{4}.$$

5°) Le point M de C d'abscisse x a pour ordonnée f(x). Le point N de D d'abscisse x a pour ordonnée  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{e^2}{4}$ , d'après la question précédente.  $\overline{NM}$  est la distance (verticale) entre ces deux points.

Par conséquent,  $\varphi(x) = \overline{NM} = f(x) - \left(-\frac{1}{4}x - \frac{e^2}{4}\right) = f(x) + \frac{x + e^2}{4}$ .

$\varphi$  est dérivable sur Df comme somme de f et d'une fonction affine.

$$\forall x \in D_f, \varphi'(x) = f'(x) + \frac{1}{4} = g(x) + \frac{1}{4}. \quad \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > -\frac{1}{4}.$$

Or, d'après le tableau de variation de g,  $-\frac{1}{4}$  est la valeur minimale de g sur  $]1; +\infty[$ , en

d'autres termes  $\forall x \in ]1; +\infty[, g(x) \geq -\frac{1}{4} : \varphi'(x)$  est positif sur  $]1; +\infty[$ .

Tableau de variation de  $\varphi$

x	1	$e^2$	+∞
---	---	-------	----

$\varphi'(x)$	
$\varphi$	$-\infty$ $+\infty$

Conclusion :  $\varphi(x)$  est négatif sur  $]1; e^2[$  et positif sur  $]e^2; +\infty[$ . Par suite :  
**C est en-dessous de D sur  $]1; e^2[$  et au-dessus de D sur  $]e^2; +\infty[$ .**

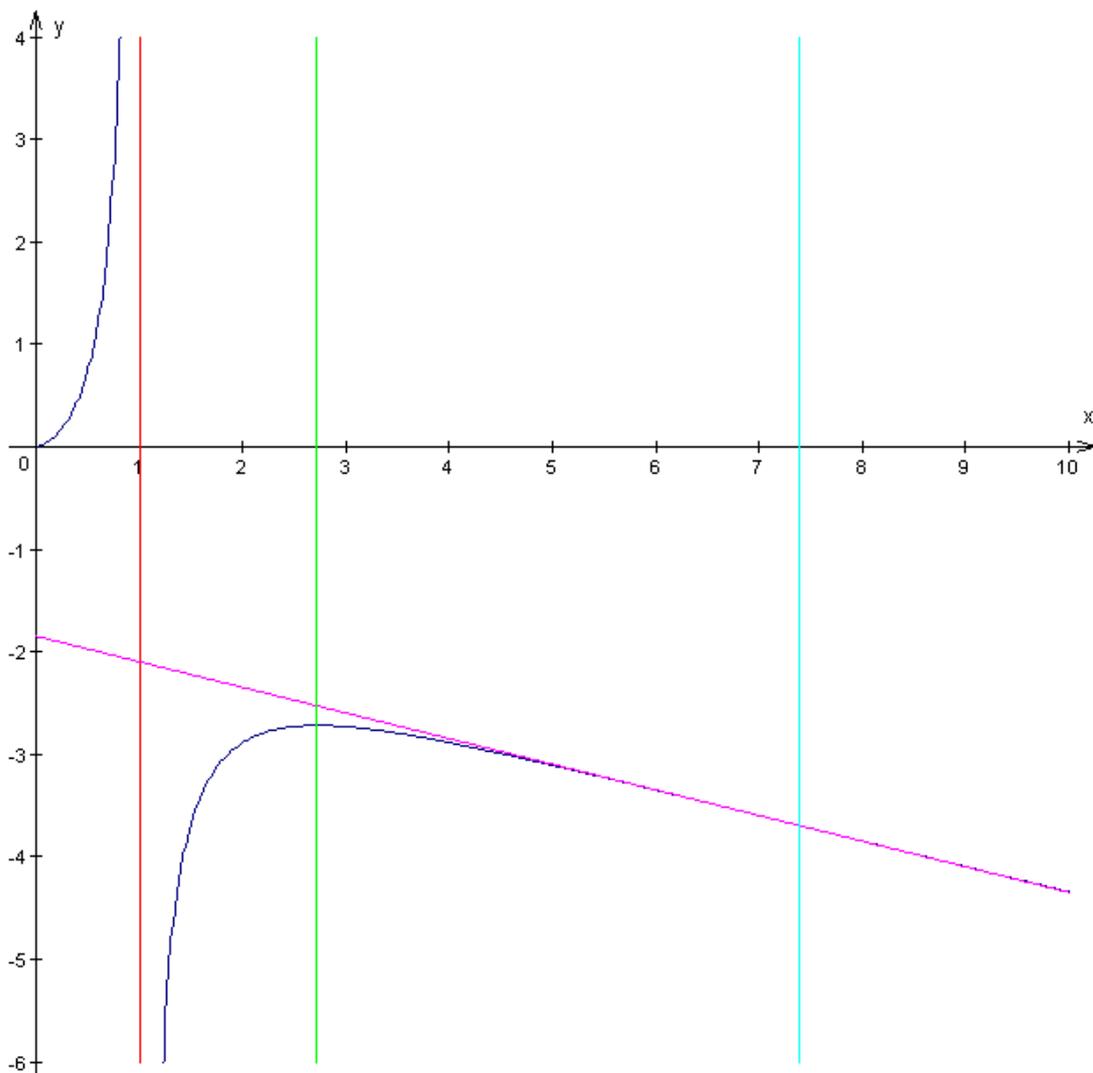
6°) Voir ci-dessous .

### Partie C

La fonction  $g$  est négative entre  $e$  et  $e^2$  (on vérifie d'ailleurs que  $g(e) = 0$ ).

Donc l'aire demandée est :  $\mathcal{A} = - \int_e^{e^2} g(x) dx \times 4 \text{ cm}^2$ . Or  $f$  est une primitive de  $g$ , d'où :

$$\mathcal{A} = - \left[ \frac{-x}{\ln x} \right]_e^{e^2} \times 4 = \underline{(2e^2 + 4e) \text{ cm}^2}.$$



Commentaires : C'est l'un des sujets de bac les plus mal libellés. Il était quasiment impossible pour un élève de TS2 (et même de TS1 !) de traiter l'exercice 1, car le lien entre la première question et la seconde n'est pas immédiat .

C'était la première fois qu'on proposait ce genre de série statistique (exercice 2) . Beaucoup de candidats ont été déroutés, car la plupart des collègues, cette année-là, n'ont traité que les séries doubles injectives (à chaque valeur de  $x$ , correspond une seule valeur de  $y$ ) .

Enfin, pour le problème, l'énoncé aurait dû indiquer aux élèves que la fonction  $g$  s'annule pour  $x = e$ , ce qui aurait simplifié la détermination du signe de  $g(x)$  .

## BAC S2 2001 2<sup>ème</sup> groupe . SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) L'équation caractéristique est :  $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i$  ou  $r = -i$ .

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :  $y = A \cos x + B \sin x$ .

2°)  $f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$ .  $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ .  $f'(0) = \sqrt{3} \Rightarrow B = \sqrt{3}$ .

La solution particulière est donc :  $y = f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$ .

3°) a)  $f(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = -\cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{3} - x = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + 2k'\pi$$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{13\pi}{12} + 2k'\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) La résolution est la même qu'au a). Seul l'ensemble de solutions change. On retient, parmi les solutions précédentes, celles qui appartiennent à  $[0 ; 2\pi[$ . D'où :

$$S' = \left\{ \frac{19\pi}{12} ; \frac{13\pi}{12} \right\}.$$

### EXERCICE 2

1°)  $\alpha^2 - 2i\alpha - 1 = (\alpha - i)^2 - i^2 - 1 = (\alpha - i)^2$ .

Le discriminant de l'équation proposée est:

$\Delta = [-\alpha(\alpha + i)]^2 - 4(i\alpha^3) = \alpha^2((\alpha + i)^2 - 4i\alpha) = \alpha^2(\alpha^2 - 2i\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha - i)^2$  d'après le calcul précédent. Une racine carrée de  $\Delta$  est donc:  $\alpha(\alpha - i)$

D'où les solutions de l'équation (E) :

$$z_1 = \frac{\alpha(\alpha + i) - \alpha(\alpha - i)}{2} = \alpha i \text{ et } z_2 = \frac{\alpha(\alpha + i) + \alpha(\alpha - i)}{2} = \alpha^2.$$

2°) Posons  $\alpha = r e^{i\theta}$ . Alors les solutions précédentes s'écrivent :

$$z_1 = r e^{i\theta} i = r e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow |z_1| = r \text{ et } \arg(z_1) = \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]; \text{ et}$$

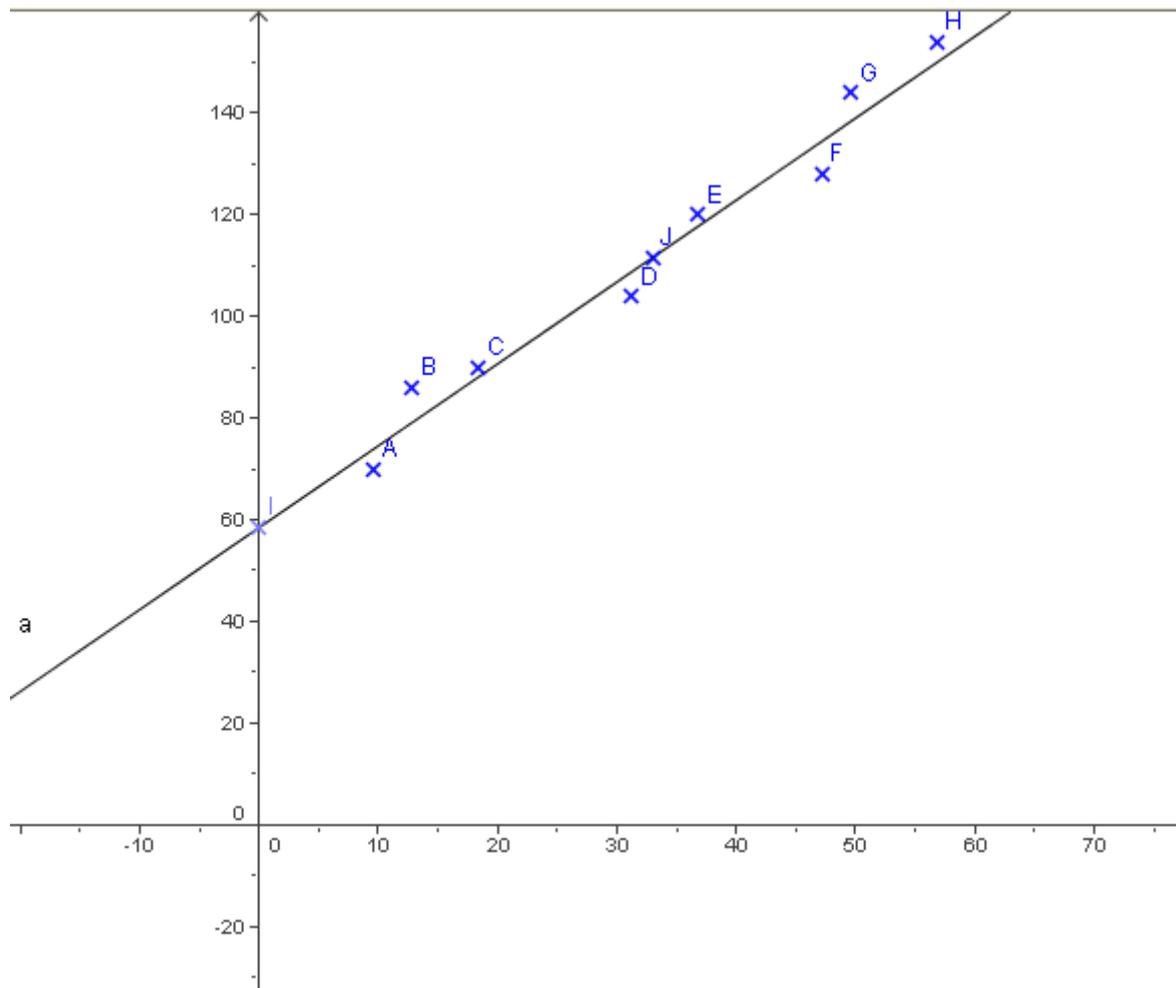
$$z_2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow |z_2| = r^2 \text{ et } \arg(z_2) = 2\theta [2\pi].$$

3°)  $S_\alpha$  est une rotation d'angle  $\frac{5\pi}{6}$  si et seulement si  $|i\alpha| = 1$  et  $\arg(i\alpha) = \frac{5\pi}{6}$ , d'où, puisque

$$z_1 = i\alpha, r = 1 \text{ et } \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \text{ soit: } r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ Donc } \alpha = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}.$$

### EXERCICE 3

1°) Voir figure ci-dessous.



$$2^{\circ) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{9,6 + 12,8 + 18,4 + 31,2 + 36,8 + 47,2 + 49,6 + 56,8}{8} = \frac{262,4}{8} = 32,8$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{70 + 86 + 90 + 104 + 120 + 128 + 144 + 154}{8} = \frac{896}{8} = 112$$

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i^2}{8} - \bar{x}^2. \text{ Numériquement, on obtient :}$$

$$V(x) = \frac{9,6^2 + 12,8^2 + 18,4^2 + 31,2^2 + 36,8^2 + 47,2^2 + 49,6^2 + 56,8^2}{8} - (32,8)^2$$

$$\text{Soit : } V(x) = \frac{10836,48}{8} - 1075,84 = 278,72.$$

$$V(y) = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i^2}{8} - \bar{y}^2. \text{ Numériquement, on obtient :}$$

$$V(y) = \frac{70^2 + 86^2 + 90^2 + 104^2 + 120^2 + 128^2 + 144^2 + 154^2}{8} - 12544 = 762.$$

3°)  $D_{y/x}$  a pour équation :  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$  avec  $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$ .

Or,  $\text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i}{8} - \bar{x} \bar{y}$ . Numériquement, on trouve :  $\text{cov}(x, y) = 454$ .

Finalement, on obtient :

$$D_{y/x} : y - 112 = \frac{454}{278,72} (x - 32,8) \Leftrightarrow y = 1,63x + 58,5.$$

Pour le tracé de  $D_{y/x}$ , voir figure ci-dessus.

#### **EXERCICE 4**

1°) La fonction  $\varphi : x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ , donc en particulier en 0. Sa fonction dérivée est  $\varphi' : x \mapsto e^x$  et par conséquent,  $\varphi'(0) = e^0 = 1$

D'où :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

$$2^\circ) \text{ a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + 7 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -4e^x = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \quad (2)$$

$$f(0) = -0 + 7 - 4e^0 = 3 \quad (3).$$

(1), (2) et (3) entraînent que : **f est continue au point 0.**

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + 4 - 4e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 - 4 \frac{e^x - 1}{x} = -5, \text{ d'après}$$

la limite obtenue au 1°. f est donc dérivable à gauche en 0 et **f'g(0) = -5**.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 - \ln x = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Par suite, **f n'est pas dérivable à droite en 0.**

**Interprétation géométrique :** Au point d'abscisse 0, la courbe  $\mathcal{C}$  de f admet deux demi-tangentes : une demi-tangente de coefficient directeur -5 et une demi-tangente verticale.

c) f est dérivable sur  $] -\infty ; 0 [$  comme somme de deux fonctions dérivables :

$$\forall x \in ] -\infty ; 0 [, f'(x) = -1 - 4e^x < 0.$$

f est aussi dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  comme somme de deux fonctions dérivables.

$$\forall x \in ]0 ; +\infty [, f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

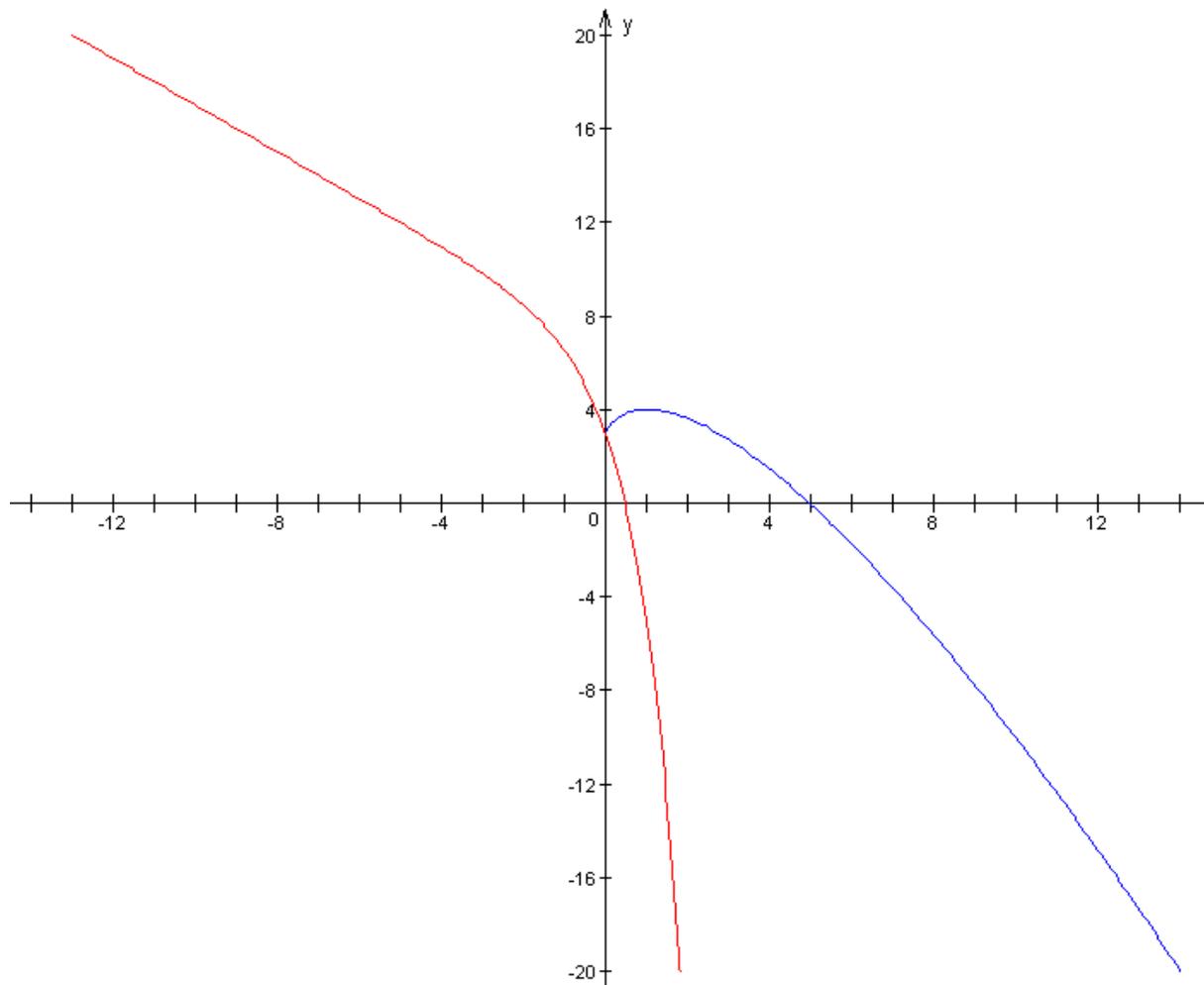
f'(x) est donc  $> 0$  si  $x \in ]0 ; 1 [$  (signe contraire de  $\ln x$ ) et f'(x) est  $< 0$  si  $x \in ]1 ; +\infty [$ .

Le tableau de variation de f en résulte.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{3}{x} - \ln x \right) = -\infty$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)	-		+	-
f	$+\infty$	3	4	$-\infty$

3°) a)  $f(e) = 3$  ;  $f'(e) = -1$  . L'équation de la tangente au point d'abscisse e est donc:  
 $y - e = -(x - e)$  ou  $y = -x + 2e$  .



Commentaire : Il était difficile de rédiger ce sujet, en effectuant tous les calculs, dans le temps imparti.

## BAC S2 2001 1<sup>er</sup> groupe . SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) a)  $f(z) = z \Leftrightarrow 2z - i = z^2 - 2iz \Leftrightarrow z^2 - (2i + 2)z + i = 0$ .

Pour résoudre cette équation, on calcule son discriminant  $\Delta' = (i + 1)^2 - i = i$ .

Pour déterminer les racines carrées de  $\Delta$ , on pose le système classique :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si on choisit  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on obtient à partir de la deuxième équation  $y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Une racine carrée de  $\Delta$  est donc  $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ . Les solutions sont donc, sous forme algébrique :

$$z_1 = i + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = (i + 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} i.$$

$$z_2 = i + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = (i + 1) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} i.$$

Et sous forme trigonométrique :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}(1 + i) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] = (\sqrt{2} - 1) \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}(1 + i) = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] = (\sqrt{2} + 1) \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

b)  $z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2 z_2^2$ . Et  $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2$ .

Or,  $z_1 + z_2 = 2i + 2$  et  $z_1 z_2 = i$  d'après l'équation du second degré obtenue au 1°.

D'où :  $z_1^2 + z_2^2 = (2i + 2)^2 - 2i = 6i$  et par suite :  $(z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2 z_2^2 = (6i)^2 - 2i^2$

Enfin, on trouve :  $z_1^4 + z_2^4 = -34$ .

2°) Soit A le point d'affixe  $\frac{i}{2}$  et B le point d'affixe  $2i$ .

On a :  $f(z) = 2 \frac{z - \frac{i}{2}}{z - 2i}$ .  $f(z)$  est imaginaire pur si et seulement si  $\frac{z - \frac{i}{2}}{z - 2i}$  est imaginaire pur, ce qui équivaut à :

$$\arg \left( z - \frac{i}{2} \right) - \arg (z - 2i) = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow (\vec{i}, \vec{AM}) - (\vec{i}, \vec{BM}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

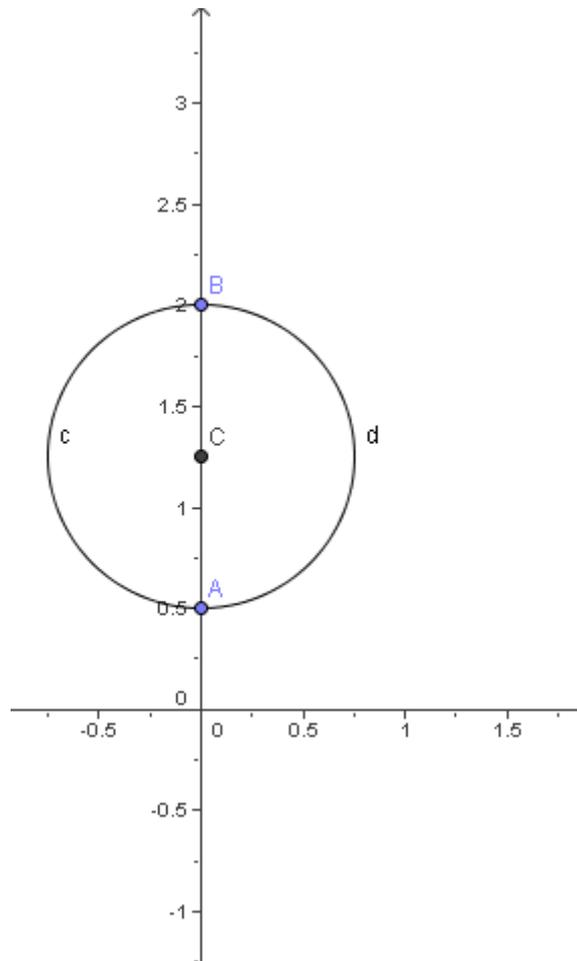
$\Leftrightarrow (\vec{BM}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow M$  appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B

**( $\Gamma$ ) est donc le cercle de diamètre [AB] privé des points A  $\left(\frac{i}{2}\right)$  et B  $(2i)$ .**

Dans le plan complexe, A a pour coordonnées  $(0; \frac{1}{2})$  et B  $(0; 2)$ .

Soit M de coordonnées  $(x, y)$ .  $M \in \Gamma$  si et seulement si  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ , ce qui équivaut à :

$$(0 - x) \times (0 - x) + \left(\frac{1}{2} - y\right) (2 - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2} y + 1 = 0 .$$



$$2^\circ) |f(z)| = 1 \Leftrightarrow f(z) \times \overline{f(z)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2z - i}{z - 2i} \times \frac{2\overline{z} + i}{\overline{z} + 2i} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\overline{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 .$$

### **EXERCICE 2**

1°) Au premier triage, on a 4 possibilités d'obtenir un jeton de numéro strictement inférieur à 5, et au deuxième triage, on en a 3 (une de moins) . Le nombre de cas favorables à la réalisation de A est donc :  $\text{card } A = 4 \times 3$  .

Chaque tirage étant un arrangement à 2 éléments de l'ensemble des 10 jetons, le nombre de cas possibles est :  $A_{10}^2 = 10 \times 9$  .

La probabilité de l'événement A est donc :  $p(A) = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{15}$  .

Les couples satisfaisant à la condition de l'énoncé sont :

(3, 1) (4, 1) (5, 1) (5, 2) (6, 1) (6, 2) (7, 1) (7, 2) (7, 3) (8, 1) (8, 2) (8, 3) (9, 1) (9, 2) (9, 3) (9, 4) (10, 1) (10, 2) (10, 3) (10, 4). Il y en a 20.

(Nous avons procédé à un décompte systématique en donnant au numéro du premier jeton toutes les valeurs possibles).

La probabilité de l'événement B est donc :  $p(B) = \frac{20}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$ .

2°) On a affaire maintenant à un schéma de Bernoulli de paramètres 7 (nombre d'épreuves) et  $p = \frac{2}{9}$  (probabilité d'obtention d'un succès). Soit X la loi binomiale associée (égale au nombre de succès au bout des 7 épreuves).

La probabilité que B soit réalisé exactement 2 fois au bout des 7 épreuves est :

$$p(X=2) = C_7^2 \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{7}{9}\right)^5 = \approx 0,295.$$

La probabilité que B n'ait pas été réalisé au bout des 7 épreuves est :

$$p(X=0) = C_7^0 \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^7 = \approx 2,126 \times 10^{-3}.$$

La probabilité que B soit réalisé au moins une fois est donc :

$$1 - p(X=0) = \approx 0,997.$$

### **PROBLEME**

1°) a)  $g(x)$  existe si et seulement si  $x > 0 \Rightarrow Dg = ]0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - 2 \ln x + (\ln x)^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x - 2x \ln x + x(\ln x)^2].$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\sqrt{x} \ln x)]^2 = 0^2 = 0.$$

Il résulte de cela que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$  : **g est continue à droite en 0.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty).$$

Il en résulte que **g n'est pas dérivable à droite en 0.**

D'autre part, **g est continue et dérivable sur ]0; +∞[** comme produit de deux fonctions :

- $x \mapsto x$  (continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme fonction affine)
- $x \mapsto (1 - \ln x)^2$  (continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme composée de trois fonctions, à savoir  $x \mapsto \ln x$ ,  $x \mapsto 1 - x$ ,  $x \mapsto x^2$ ).

$$\text{b) } \forall x > 0, g'(x) = (1 - \ln x)^2 + 2x(1 - \ln x) \times \left(-\frac{1}{x}\right) \text{ (formule de dérivation d'un produit)}$$

$$\text{D'où : } g'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x) = (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2) \\ = (1 - \ln x)(-1 - \ln x) = \ln^2 x - 1.$$

Cette dernière expression est positive si et seulement si ( $\ln x < -1$  ou  $\ln x > 1$ ) soit :

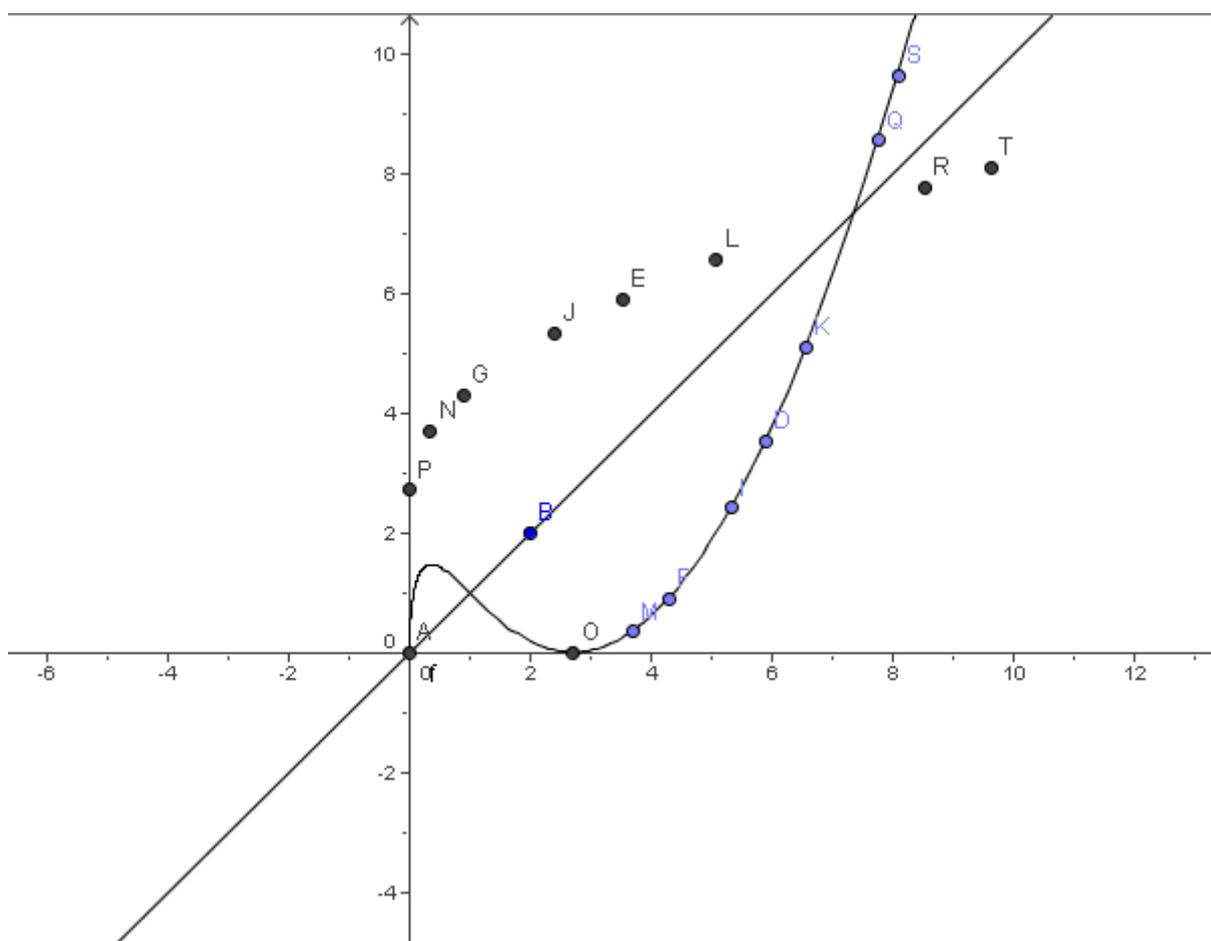
$(0 < x < \frac{1}{e})$  ou  $(x > e)$ . Le tableau de variation de g en résulte.

x	0	$e^{-1}$	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	-	+
g	0	$2e^{-1}$	0	$+\infty$

c) La courbe ( $\mathcal{C}$ ) admet une demi-tangente verticale en 0 car :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$ , donc la courbe ( $\mathcal{C}$ ) admet une branche

parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .



2°) a) La fonction  $g$  est positive sur l'intervalle  $] \alpha ; e [$ , donc  $a(\alpha) = \int_{\alpha}^e g(x) dx$ .

Intégrons une première fois par parties en posant :

$$u(x) = (1 - \ln x)^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = x \quad \text{d'où} : \quad u'(x) = \frac{-2(1 - \ln x)}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$a(\alpha) = \left[ \frac{x^2(1 - \ln x)^2}{2} \right]_{\alpha}^e + \int_{\alpha}^e x(1 - \ln x) dx. \quad \text{Pour } x = e, \text{ la partie entre crochets vaut } 0, \text{ d'où} :$$

$$a(\alpha) = - \frac{\alpha^2(1 - \ln \alpha)^2}{2} + \int_{\alpha}^e x(1 - \ln x) dx. \quad \text{Soit } J \text{ cette dernière intégrale.}$$

Intégrons à nouveau par parties en posant :

$u(x) = 1 - \ln x$  et  $v'(x) = x$  d'où :  $u'(x) = -\frac{1}{x}$  et  $v(x) = \frac{x^2}{2}$ . On en déduit que :

$$J = \left[ \frac{x^2(1-\ln x)}{2} \right]_{\alpha}^e + \int_{\alpha}^e \frac{x}{2} dx = \frac{-\alpha^2(1-\ln \alpha)}{2} + \left[ \frac{x^2}{4} \right]_{\alpha}^e = \frac{-\alpha^2(1-\ln \alpha)}{2} + \frac{e^2 - \alpha^2}{4}$$

Finalement, on obtient:

$$a(\alpha) = -\frac{\alpha^2(1-\ln \alpha)^2}{2} + \frac{-\alpha^2(1-\ln \alpha)}{2} + \frac{e^2 - \alpha^2}{4} = \frac{e^2 - 5\alpha^2}{4} + \frac{3\alpha^2 \ln \alpha}{2} - \frac{\alpha^2 \ln^2 \alpha}{2}.$$

$$\text{Soit : } \mathbf{a}(\alpha) = \frac{e^2 - 5\alpha^2 + 6\alpha^2 \ln \alpha - 2\alpha^2 \ln^2 \alpha}{4}$$

$$\mathbf{b) } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbf{a}(\alpha) = \frac{e^2}{4} \text{ car } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 \ln \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 \ln^2 \alpha = 0.$$

**3°) a)** Résolvons l'équation  $g(x) = x \Leftrightarrow x(1 - \ln x)^2 = x \Leftrightarrow x[1 - (1 - \ln x)^2] = 0$

$\Leftrightarrow x(\ln x)(2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$  ou  $x = e^2$ . Les points d'intersection de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et de la droite ( $\Delta$ ) sont donc : **O(0, 0) A(1, 1) et B(e<sup>2</sup>, e<sup>2</sup>)**.

**b)** Résolvons l'équation  $g(x) = mx \Leftrightarrow x(1 - \ln x)^2 = mx \Leftrightarrow x[m - (1 - \ln x)^2] = 0$ .

Cette dernière équation admet des solutions autres que 0 si et seulement si l'équation  $(1 - \ln x)^2 = m$  a des solutions c'est-à-dire si et seulement si  $m \geq 0$ . On a alors :

$$1 - \ln x = \sqrt{m} \text{ ou } 1 - \ln x = -\sqrt{m} \Leftrightarrow x = e^{1-\sqrt{m}} \text{ ou } x = e^{1+\sqrt{m}}.$$

**c)** P a pour coordonnées (e ; me). M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> ont pour coordonnées respectivement :

(e<sup>1-√m</sup> ; m e<sup>1-√m</sup>) et (e<sup>1+√m</sup> ; m e<sup>1+√m</sup>). D'après la formule donnant la distance entre deux points en repère orthonormé :

$$OP^2 = e^2 + (me)^2 = e^2(1 + m^2); OM_1 = \sqrt{(e^{1-\sqrt{m}})^2 + (m e^{1-\sqrt{m}})^2} = e^{1-\sqrt{m}} \sqrt{1 + m^2};$$

$$OM_2 = \sqrt{(e^{1+\sqrt{m}})^2 + (m e^{1+\sqrt{m}})^2} = e^{1+\sqrt{m}} \sqrt{1 + m^2}; \text{ par suite :}$$

$$OM_1 \times OM_2 = e^{1-\sqrt{m}} \times e^{1+\sqrt{m}} (1 + m^2) = e^2 (1 + m^2) = OP^2.$$

**4°) a)** D'après le tableau de variation du 1° b), h est continue et strictement croissante sur  $]e; +\infty[$ , donc réalise une bijection de  $]e; +\infty[$  vers  $]0; +\infty[$ . Sa bijection réciproque h<sup>-1</sup> est donc définie sur  $]0; +\infty[$ .

**b)** h' ne s'annule pas sur  $]e; +\infty[$ , donc h<sup>-1</sup> est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

h(e<sup>2</sup>) = e<sup>2</sup> (déjà vu au 3° a). d'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque,

$$h^{-1}'(e^2) = \frac{1}{h'(e^2)} = \frac{1}{\ln^2 e^2 - 1} = \frac{1}{3}.$$

**c)** cf figure.

## BAC S2 2000 Remplacement SOLUTION

### EXERCICE 1

$$1^\circ) |Z| = |1 - x| \left| e^{\frac{i\pi}{3}} \right| \text{ d'où : } |Z| = |1 - x| \quad \text{car } \left| e^{\frac{i\pi}{3}} \right| = 1.$$

$$\arg(Z) = \arg(1 - x) + \arg\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) [2\pi]$$

$$\arg(Z) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ si } x < 1 ; \arg(Z) = \frac{4\pi}{3} [2\pi] \text{ si } x > 1 ;$$

$$\text{car : } \arg(1 - x) = 0 [2\pi] \text{ si } (1 - x) > 0 \quad \text{et} \quad \arg(1 - x) = \pi [2\pi] \text{ si } (1 - x) < 0.$$

$$\text{Si } x < 1, Z = (1 - x) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = (1 - x) e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

$$\text{Si } x > 1, Z = (x - 1) \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (1 - x) e^{\frac{i4\pi}{3}}.$$

Si  $x = 1$ ,  $Z = 0$  donc  $\arg(Z)$  est non défini.

$$2^\circ) \text{ Si } x < 1, \arg(Z^{2004}) = \frac{2004\pi}{3} = 668\pi = 0 [2\pi].$$

$$\text{Si } x > 1, \arg(Z^{2004}) = \frac{2004 \times 4\pi}{3} = 2672\pi = 0 [2\pi].$$

$$\text{Si } x = 1, Z^{2004} = 0.$$

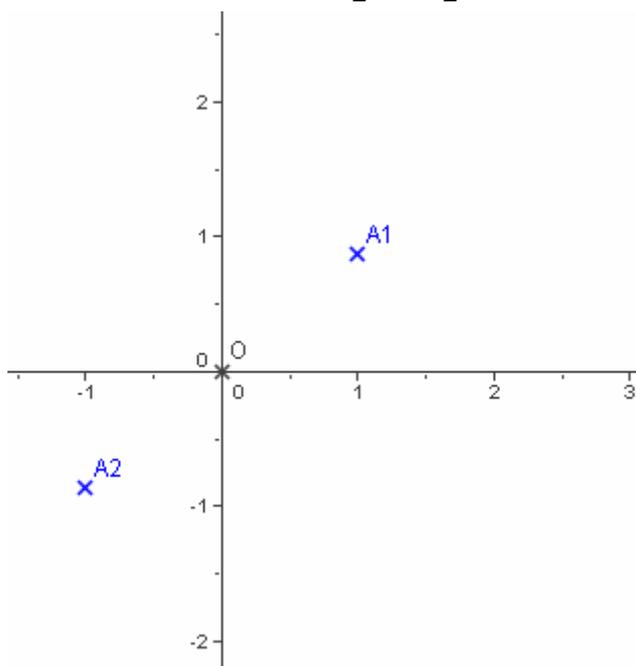
Ainsi, dans tous les cas, soit  $Z^{2004} = 0$ , soit  $\arg(Z^{2004}) = 0 [2\pi]$ . Donc :  
 $Z^{2004}$  est un réel positif.

$$3^\circ) \text{ a) } |Z| = 2 \Leftrightarrow |1 - x| = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 2 \text{ ou } 1 - x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3.$$

Il y a donc deux valeurs possibles pour  $Z$  :

$$Z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad Z_2 = -2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{b) } Z_1 = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}. \quad Z_2 = -2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$



c) Il est clair que  $A_1$  et  $A_2$  sont symétriques par rapport à  $O$ , car leurs coordonnées sont opposées.

### **EXERCICE 2**

1°) a) L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons à 4 éléments de l'ensemble des 8 animaux. L'ensemble des valeurs de  $X$  est  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ .

$$p(X=0) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{14} \cdot p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_5^3}{C_8^4} = \frac{3}{7} \cdot p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^2}{C_8^4} = \frac{3}{7} \cdot$$

$$p(X=3) = \frac{C_3^3 \times C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{14} \cdot$$

Les résultats peuvent être résumés dans le tableau suivant :

$X_i$	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

— Si  $x \in ]-\infty ; 0[$  :  $F(x) = P(X \leq x) = 0$

— Si  $x \in [0 ; 1[$  :  $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{14}$

— Si  $x \in [1 ; 2[$  :  $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

— Si  $x \in [2 ; 3[$  :  $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{13}{14}$

— Si  $x \in [3 ; +\infty[$  :  $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = 1$ .

Pour la représentation graphique, cf. page suivante.

2°) a)  $P(A) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$ .

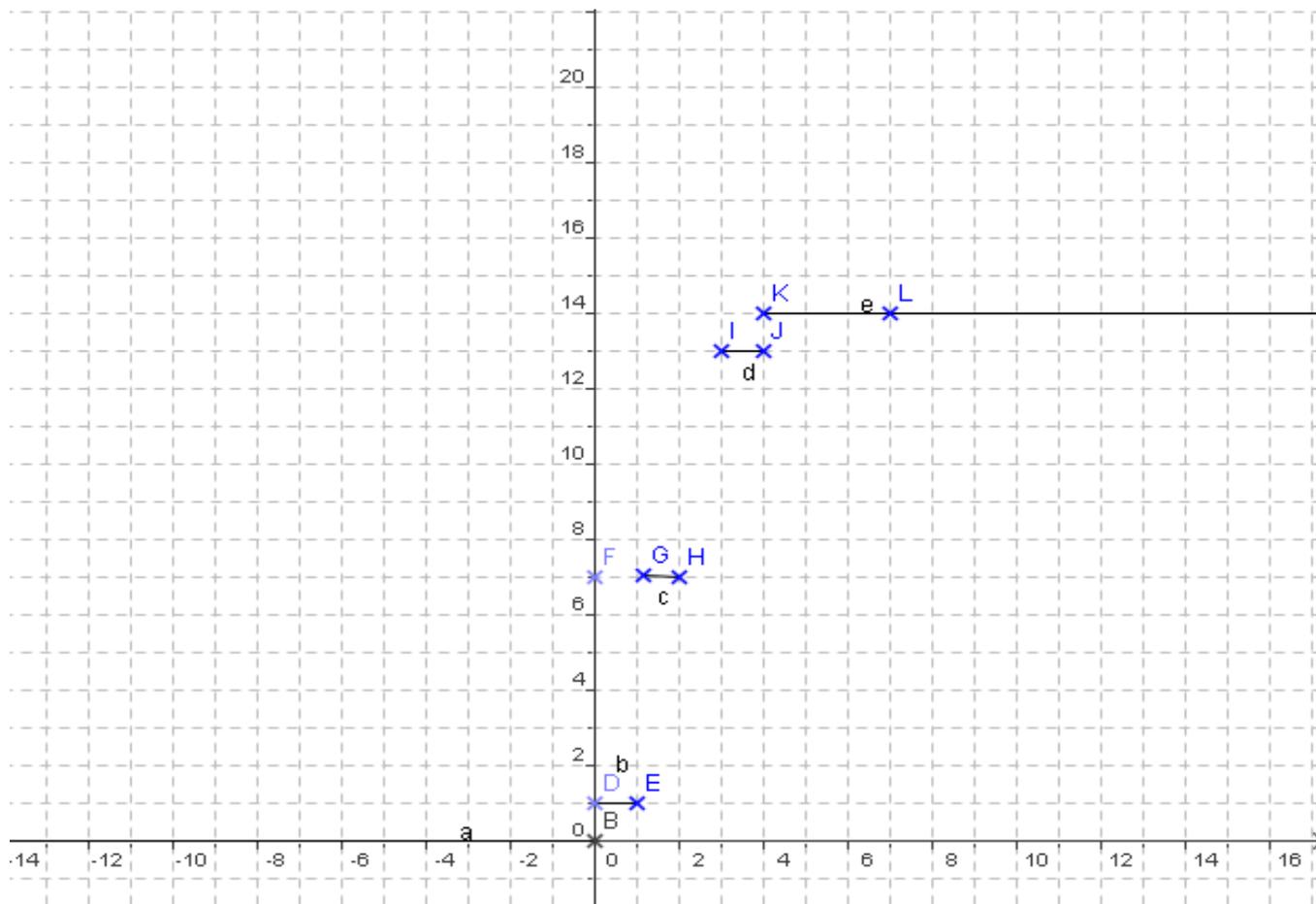
Si  $X=0$ , on disposera de  $4 \times 15 = 60$  kg de viande, si  $X=1$  de  $(20 + 3 \times 15) = 65$  kg de viande, si  $X=2$  de  $((40 + 30) = 70$  kg de viande, si  $X=3$  de  $(60 + 15) = 75$  kg de viande.

Donc  $P(B) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$ .

b) On constate, d'après la question précédente, que  $A \subset B$  car, si on a tué au moins 2 moutons, cela entraîne qu'il y aura assez de viande (au moins 65 kg).

D'où :  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ .

$P(B|A) \neq P(B)$ , donc **A et B ne sont pas indépendants**.



Représentation graphique de la fonction de répartition  $F$ .

**PROBLEME**

I.1°)  $g$  est définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme composée de fonctions dérivables .

$\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $g'(x) = -e^{-x} + x e^{-x} = (x - 1) e^{-x}$  (formule de dérivation d'un produit) .

$g'(x)$  est donc du signe du  $(x - 1)$  . Le tableau de variation de  $g$  en découle .

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$ $	$+$
$g$	$+\infty$	$1 - e^{-1}$	$1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x e^{-x} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^{-x} = +\infty .$$

I. 2°) On en déduit que  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $g(x) > 0$  .

**II.1. a**  $f$  est continue et dérivable sur  $] -\infty ; -1 [$  [ comme composée de deux fonctions : continues et dérivables :  $x \mapsto -x$  et  $x \mapsto \ln x$  .

$f$  est continue sur  $] -1 ; +\infty [$  [ comme produit de deux fonctions continues et dérivables :  $x \mapsto x+1$  et  $x \mapsto 1+e^{-x}$  .

Étudions la continuité et la dérivabilité en  $-1$  .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(-x) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)(1+e^{-x}) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{f \text{ est continue en } 0} .$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\ln(-x)}{x+1} . \text{ Faisons le changement de variable}$$

$$u = -x . \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\ln(-x)}{x+1} = \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{\ln u}{-u+1} = \lim_{u \rightarrow 1^+} -\frac{\ln u}{u-1} = -1 .$$

Ainsi  $f$  est dérivable à gauche en  $-1$  et  $f'_g(-1) = -1$  .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(1+e^{-x})}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+e^{-x} = 1+e .$$

Ainsi  $f$  est dérivable à droite en  $-1$  et  $f'_d(-1) = 1+e$  .

Conclusion générale :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  . Au point d'abscisse  $-1$  , la courbe de  $f$  présente deux demi-tangentes de coefficients directeurs  $-1$  et  $1+e$  .

**II.1.b)**  $\forall x \in ] -\infty ; -1 [ , f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} < 0$  .

$\forall x \in ] -1 ; +\infty [ , f'(x) = 1+e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = 1 - x e^{-x} = g(x) > 0$  d'après I .  
 $f$  est donc décroissante sur  $] -\infty ; -1 [$  et croissante sur  $] -1 ; +\infty [$  .

Tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$
$f$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty$  comme on le voit en appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée, ou alors en faisant le changement de variable  $u = -x$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{x+1}{e^x} = +\infty$$

(car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$  .

**II.2. a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = 0$  : la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x+1$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  en  $+\infty$  .

D'autre part,  $f(x) - (x+1) = \frac{x+1}{e^x} < 0 \forall x \in ] -1 ; +\infty [$  , donc  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$

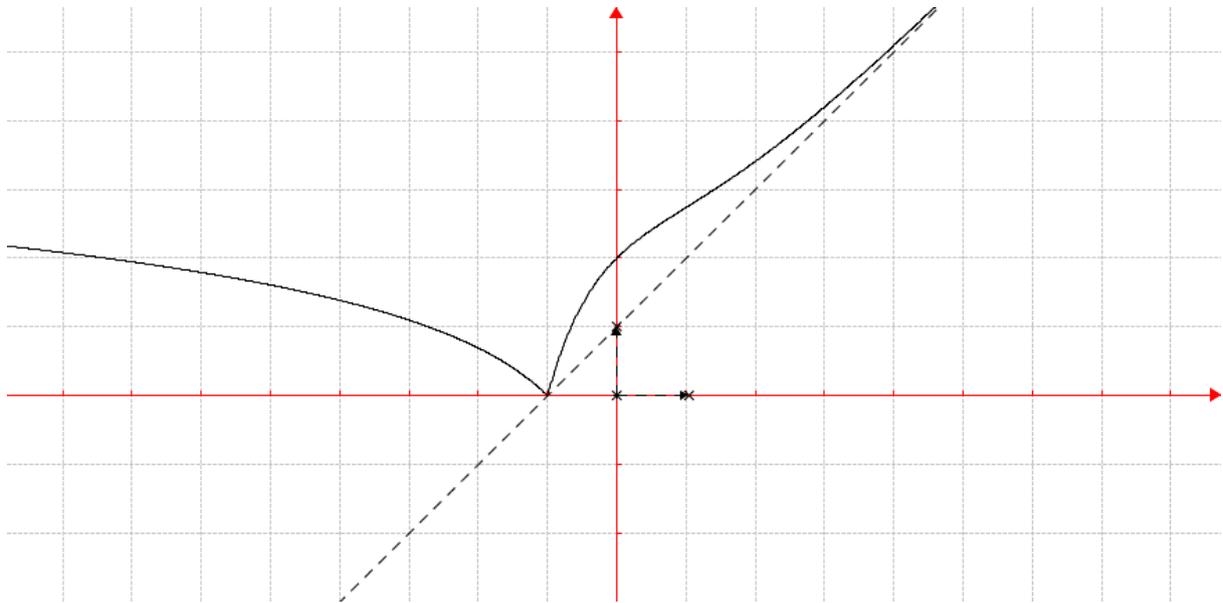
sur  $] - 1 ; + \infty [$ .

**II. 3** Si  $x$  est l'abscisse d'un point où la tangente (T) à la courbe  $\mathcal{C}$  est parallèle à la droite

$$\mathcal{D}, \text{ on doit avoir } f'(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \text{ et } x < -1 \text{ (1)} \\ \text{ou} \\ 1 - x e^{-x} = 1 \text{ et } x > -1 \text{ (2)} \end{cases}$$

La condition (1) étant manifestement impossible et la condition (2) entraînant que  $x e^{-x} = 0$ , soit  $x = 0$ , on en déduit que le point cherché est le point d'abscisse 0 de  $\mathcal{C}$ : il est unique.

**II. 4**



**II. 5. a)** D'après le tableau de variation du II. 1. b)  $f$  est continue et strictement croissante de  $] - 1 ; + \infty [$  vers  $] 0 ; + \infty [$ , donc réalise une bijection de  $] - 1 ; + \infty [$  vers  $J = ] 0 ; + \infty [$ .

**II. 5. b)** Voir figure ci-dessus.

$$\text{III.a) } A(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} [f(x) - (x+1)] dx = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)(1 + e^{-x} - 1) dx = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx.$$

Intégrons par parties en posant :  $u(x) = x + 1$  et  $v'(x) = e^{-x}$ , d'où :  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -e^{-x}$

$$A(\lambda) = \left[ -(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^{\lambda} + \int_{-1}^{\lambda} e^{-x} dx = -(\lambda + 1)e^{-\lambda} + \left[ -e^{-x} \right]_{-1}^{\lambda}.$$

$$A(\lambda) = (-\lambda - 2)e^{-\lambda} + e^{-1}.$$

$$\text{III. b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda) = e^{-1} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\lambda - 2)e^{-\lambda} = 0.$$

Cette limite représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite d'équation  $y = x + 1$  (ensemble infini de points, mais dont l'aire est finie !).

**BAC S2 2000 1<sup>er</sup> groupe . SOLUTION**

**EXERCICE 1**

1°) a)  $Z_2 - Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  d'où :  $Z_2 - Z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

$Z_3 - Z_1 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  d'où :  $Z_3 - Z_1 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ .

b) 
$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}$$

et, puisque  $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 1$ , on a :  $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)$ , soit :

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16} \quad (1)$$

On a aussi :  $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}}{2 e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{12}}$ , soit :

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{4} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right) \quad (2)$$

En comparant les écritures (1) et (2), on en déduit que :

$$\cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} .$$

2°) a)  $A_1$  est le centre de la similitude directe  $S$  et on a :  $Z_3 - Z_1 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{12}} (Z_2 - Z_1)$

d'après la question précédente . On en déduit que :  $\left| \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} \right| = \frac{1}{4}$  et  $\arg \left( \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} \right) = \frac{\pi}{12}$ ,

d'où :  $A_1 A_3 = \frac{1}{4} A_1 A_2$ , donc le rapport de la similitude  $S$  est  $\frac{A_1 A_3}{A_1 A_2} = \frac{1}{4}$ , et d'autre part :

$\left( \overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3} \right) = \frac{\pi}{12}$ , donc l'angle de la similitude  $S$  est  $\frac{\pi}{12}$ .

Comme de plus,  $S(A_1) = A_1$ , on peut conclure que :

$S$  est la similitude directe de centre  $A_1$ , de rapport  $\frac{1}{4}$  et d'angle  $\frac{\pi}{12}$ .

b) On a :  $Z' - Z_1 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{12}} (Z - Z_1)$  soit, d'après les calculs précédents,

$$Z' = \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16} \right) Z + 1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow Z' = \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16} \right) Z + \frac{16 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{16}$$

Si  $Z = b = 1 - 4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$ , alors  $Z - Z_1 = -4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

d'où :  $Z' - Z_1 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{12}} \left( -4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)$ ,

soit :  $Z' - Z_1 = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow Z' = Z_1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

L'image  $B'$  de  $B$  par  $S$  a donc pour affixe  $\mathbf{b}' = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ .

## EXERCICE 2

1°) a) Comme les  $(p_i)$  forment une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{30}$ , on a :

$$p_i = p_1 + \frac{i-1}{30} \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq 6) . (*) .$$

D'autre part,  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$  donc,

$$p_1 + \left(p_1 + \frac{1}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{2}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{3}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{4}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{5}{30}\right) = 1, \text{ soit :}$$

$$6p_1 + \frac{15}{30} = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{12} .$$

b) Il en résulte, d'après (\*) que :  $p_2 = p_1 + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} \Rightarrow p_2 = \frac{7}{60}$  et de même :

$$p_3 = \frac{3}{20} ; \quad p_4 = \frac{11}{60} ; \quad p_5 = \frac{13}{60} ; \quad p_6 = \frac{1}{4} .$$

2°) a) L'ensemble des valeurs possibles de  $X$  est :  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ .

La probabilité d'obtenir un numéro pair avec ce dé est :  $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$ .

L'expérience aléatoire qui consiste à tirer trois fois avec remise un jeton correspond à un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  (nombre d'épreuves) et  $p = \frac{11}{20}$  (probabilité du succès).

$$p(X=0) = C_3^0 \left(\frac{11}{20}\right)^0 \left(\frac{9}{20}\right)^3 = \mathbf{0,091125} ; \quad p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{11}{20}\right)^1 \left(\frac{9}{20}\right)^2 = \mathbf{0,334125} .$$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{11}{20}\right)^2 \left(\frac{9}{20}\right)^1 = \mathbf{0,408375} ; \quad p(X=3) = C_3^3 \left(\frac{11}{20}\right)^3 \left(\frac{9}{20}\right)^0 = \mathbf{0,166375}$$

Les résultats peuvent être résumés dans le tableau suivant :

$X_i$	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	0,091125	0,334125	0,408375	0,166375

b)  $E(X) = np$  pour une loi binomiale, d'où :  $E(X) = \frac{33}{20}$

$\sigma(X) = \sqrt{npq}$  pour une loi binomiale, d'où :  $\sigma(X) = \sqrt{\frac{33}{20} \times \frac{9}{20}}$  soit  $\sigma(X) \approx \mathbf{3,85}$ .

3°) a) L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons à 2 éléments (paires) de l'ensemble des 6 jetons .

$$\text{Donc } \text{card } \Omega = C_6^2 = 15 .$$

Les valeurs possibles de  $S$  sont les valeurs de  $|i - j|$  pour  $i$  et  $j$  éléments de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  .  
Donc la plus petite valeur de  $S$  est 1 et sa plus grande valeur est 5 .

( $S = 1$ ) est constitué des paires suivantes :  $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$  .

$$\text{D'où : } P(S = 1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} .$$

( $S = 2$ ) est constitué des paires suivantes :  $\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}$  .

$$\text{D'où : } P(S = 2) = \frac{4}{15} .$$

( $S = 3$ ) est constitué des paires suivantes :  $\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}$  .

$$\text{D'où : } P(S = 3) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} .$$

( $S = 4$ ) est constitué des paires suivantes :  $\{1, 5\}, \{2, 6\}$  .

$$\text{D'où : } P(S = 4) = \frac{2}{15} .$$

Enfin, ( $S = 5$ ) est constitué de la paire :  $\{1, 6\}$  . D'où :  $P(S = 5) = \frac{1}{15}$  .

On obtient donc pour  $S$  la loi de probabilité suivante :

$S_i$	1	2	3	4	5
$P(S = S_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

b) Cette probabilité est :  $P(S = 4) + P(S = 5) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$  .

## PROBLEME

### Partie A

1°) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}}$  . Effectuons le changement de variable :  $u = \frac{1}{x}$  . Quand  $x$

tend vers  $0^-$  ,  $u$  tend vers  $-\infty$  et  $x = \frac{1}{u}$  .

D'où :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u}{u} = 0$  ( car  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u} = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$  ) .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1+x) = 0$  ( car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$  ) .

Enfin  $f(0) = 0 \times \ln(1+0) = 0$  .

Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$  :  **$f$  est continue en  $x_0 = 0$**  .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$  ( car :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  ) .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0$  .

Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  : **f est dérivable en 0 et f'(0) = 0** .

2°) a) f est dérivable sur  $] -\infty ; 0 [$  comme produit et composée de fonctions dérivables .

$$\forall x < 0, f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \left( -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x-1}{x} \right).$$

or, si  $x < 0$ , on a :  $x - 1 < 0$  et  $x < 0$ , d'où  $\left( \frac{x-1}{x} \right) > 0$  et comme  $e^{\frac{1}{x}} > 0$ , on peut conclure

que :  **$\forall x < 0, f'(x) > 0$**  .

b) f est dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  comme produit et composée de fonctions dérivables .

$\forall x > 0, f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$  . f' est elle-même dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  comme somme

de deux fonctions dérivables et on a :  $\forall x > 0, f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} > 0$  .

f' est donc strictement croissante sur  $]0 ; +\infty [$ , et comme  $f'(0) = 0$ , on en déduit que :

$$\forall x > 0, f'(x) > 0 .$$

c) Le tableau de variation de f découle de l'étude de signe ci-dessus .

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
f'(x)	—		+	
f	$-\infty$			$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u}{u} = \ll \frac{1}{0^-} \gg = -\infty . \text{ (on a posé } u = \frac{1}{x} \text{)} .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+x) = +\infty .$$

3°) En faisant le changement de variable suggéré par l'énoncé, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u - 1}{u} = 1, \text{ car quand } x \text{ tend vers } -\infty, u \text{ tend vers } 0^- .$$

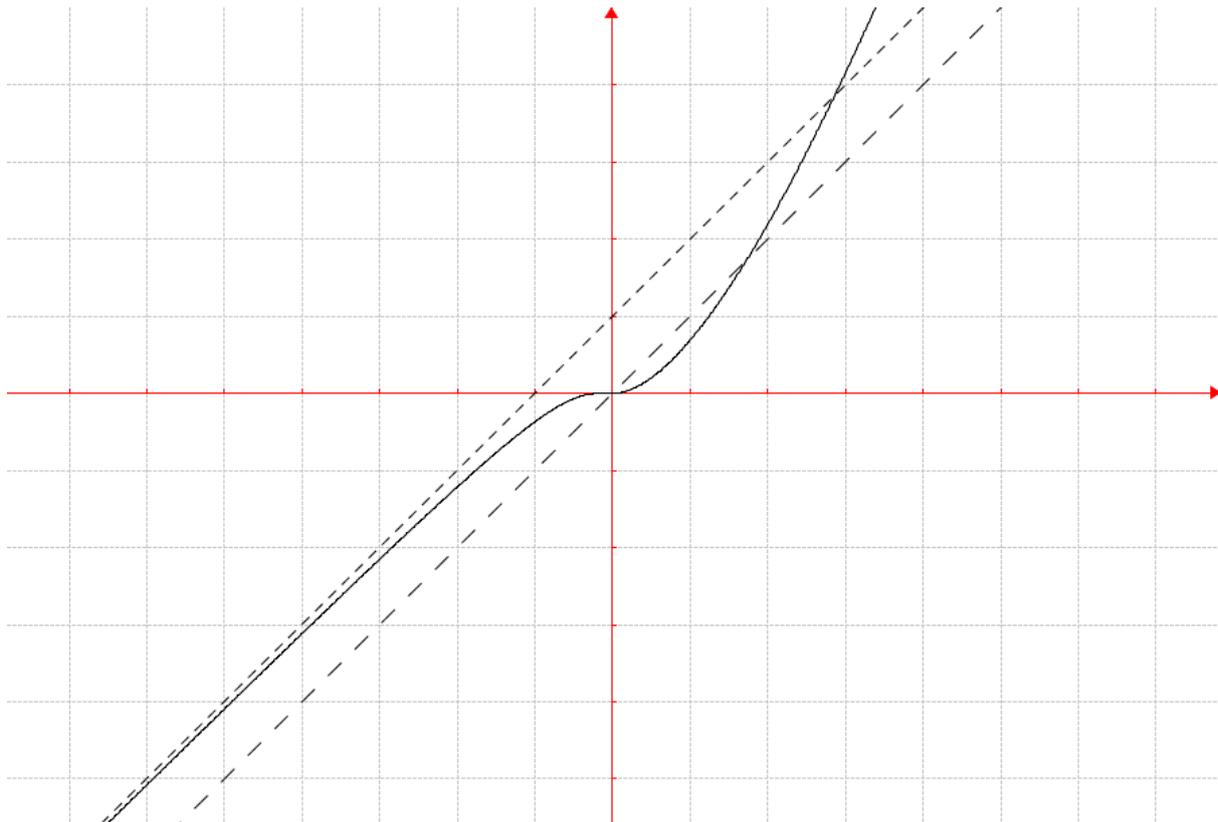
$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 = 1 - 1 = 0, \text{ d'après } 3^\circ \text{ a) .}$$

Donc la droite (D) :  $y = x + 1$  est asymptote à ( $\mathcal{C}$ ) au voisinage de  $-\infty$  .

4°) a) L'abscisse x du point d'intersection I de ( $\mathcal{C}$ ) et ( $\Delta$ ) ( $x > 0$ ) est telle que :

$$x \ln(1+x) = x \Leftrightarrow x (\ln(1+x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 1 \text{ (car } x \neq 0 \text{)} \Leftrightarrow 1+x = e$$

$\Leftrightarrow x = e - 1$  et puisque I appartient à la droite d'équation  $y = x$ , les coordonnées de I sont : **I(e - 1, e - 1)** .



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$  : ( $\mathcal{C}$ ) admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .

### Partie B

1°) Par réduction au même dénominateur,  $ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$ , d'où en identifiant les numérateurs :  $a = 1$  ;  $a + b = 0$  ;  $b + c = 0$  soit :  $a = 1$  ;  $b = -1$  ;  $c = 1$ .

Autrement dit,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$  (\*).

2°) La fonction F telle que :  $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$  est une primitive de f sur  $\mathbb{R}^+$ .

Posons  $u(t) = \ln(1+t)$  et  $v'(t) = t$  d'où :  $u'(t) = \frac{1}{1+t}$  et  $v(t) = \frac{t^2}{2}$ .

$$F(x) = \left[ \frac{t^2 \ln(1+t)}{2} \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \left( t - 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \text{ d'après la}$$

question précédente. D'où :

$$F(x) = \frac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} - t - \ln(t+1) \right]_0^x = \frac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

Finalement, on obtient bien :  $F(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$ .

$$\begin{aligned}
 3^\circ) \text{En unités d'aires : } \mathcal{A} &= \int_0^{e-1} [x - f(x)] dx = \left[ \frac{x^2}{2} - F(x) \right]_0^{e-1} = \frac{(e-1)^2}{2} - F(e-1) + F(0) \\
 &= \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{(e-1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{4} [(e-1)^2 - 2(e-1)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 4e + 3).
 \end{aligned}$$

Enfin, on trouve :  $\mathcal{A} = e - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \approx 0,621$  u.a.

Soit en  $\text{cm}^2$  :  $\mathcal{A} = 4e - e^2 - 1 \approx \mathbf{2,484 \text{ cm}^2}$ .

### Partie C

1°) a) D'après le tableau de variation ci-dessus,  $f$  est continue et strictement croissante, donc bijective de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$ .  $f$  admet par conséquent une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

b)  $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ .  $f'(0) = 0$  donc  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 0 (car  $f'(f^{-1}(0)) = 0$ ). La tangente en 0 à la courbe de  $f$  étant horizontale (car ayant pour coefficient directeur  $f'(0) = 0$ ), la tangente en 0 à la courbe de  $f^{-1}$ , qui est sa symétrique par rapport à la première bissectrice, est **verticale**.

2°) Voir figure.

3°) ( $\mathcal{D}$ ) est constituée de deux domaines symétriques par rapport à ( $\Delta$ ), donc de même aire. L'un de ces domaines a pour aire le réel  $\mathcal{A}$  calculé au B. 3°. L'aire de ( $\mathcal{D}$ ) est donc :  $2\mathcal{A} = 8e - 2e^2 - 2 \approx \mathbf{4,968 \text{ cm}^2}$ .

Commentaire : Sujet relativement difficile et exigeant pour le réussir une maîtrise parfaite de (presque) tout le programme !

## BAC S2 1999 Remplacement SOLUTION

### EXERCICE 1

1°) Posons  $a = i\alpha$ .  $a$  est solution de (E) si et seulement si  $-(i\alpha)^3 + 6(i\alpha) - 20i = 0$ , ce qui équivaut à  $i(\alpha^3 + 6\alpha - 20) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + 6\alpha - 20 = 0$ . On remarque que 2 est solution évidente. En utilisant par exemple la méthode de Hörner,  $\alpha^3 + 6\alpha - 20$  se factorise en :  $\alpha^3 + 6\alpha - 20 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 10)$ . Le trinôme  $\alpha^2 + 2\alpha + 10$  n'ayant pas de racines (son discriminant  $\Delta$  est négatif), il en résulte que nécessairement  $\alpha = 2$ , d'où :  $\mathbf{a = 2i}$ .

Par suite, (E)  $\Leftrightarrow (z - 2i)(pz^2 + qz + r) = 0$ ,  $p, q, r$  étant des nombres complexes.

En développant et en identifiant avec le premier membre de (E), on obtient :

$p = -1, r = 10, q = -2i$ . D'où :

(E)  $\Leftrightarrow (z - 2i)(-z^2 - 2iz + 10) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$  ou :  $-z^2 - 2iz + 10 = 0$ . Le discriminant de cette dernière équation est :  $\Delta = (-i)^2 + 10 = 9$ . On obtient les solutions :

$z_1 = 3 - i$  et  $z_2 = -3 - i$ . Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\mathbf{S = \{ 3 - i ; -3 - i ; 2i \} .}$$

2°)  $\frac{b-a}{c-a} = \frac{3-i-2i}{-3-i-2i} = \frac{3-3i}{-3-3i} = \frac{(1-i)(-1+i)}{2} = i$ . Il en résulte que :

$$\left| \frac{b-a}{c-a} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ces relations se traduisent géométriquement par :  $AB = AC$  et  $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$ .

donc le triangle ABC est **rectangle et isocèle**.

3°) a)  $r : z \mapsto z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z$ .  $r(A)$  a pour affixe  $a' = e^{\frac{i\pi}{3}} \times 2i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2i$ , soit :

$$\mathbf{a' = -\sqrt{3} + i .}$$

b)  $z' < 0 \Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i} < 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i}\right) = \pi [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MA}') = \pi [2\pi]$ .

**L'ensemble E est donc le segment [AA'] privé des points A et A'.**

c)  $M'$  appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si  $|z'| = 1$ , ce qui

équivaut à :  $\left| \frac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-2i| = |z+\sqrt{3}-i| \Leftrightarrow MA = MA'$ .

**L'ensemble F est donc la médiatrice du segment [AA'].**

### EXERCICE 2

1°) a)  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{0,9 + 1,2 + 0,6 + 0,5 + 1,4 + 1}{6} = \frac{5,6}{6} = \frac{14}{15} \approx 0,933$

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{6} = \frac{37 + 40 + 33 + 33 + 41 + 35}{6} = \frac{219}{6} = 36,5$ .

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2}{6} - \bar{x}^2 . \text{ Numériquement, on obtient :}$$

$$V(x) = \frac{0,9^2 + 1,2^2 + 0,6^2 + 0,5^2 + 1,4^2 + 1^2}{6} - (0,93)^2 = 0,1051 \Rightarrow \sigma_x \simeq 0,314$$

$$V(y) = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i^2}{6} - \bar{y}^2 . \text{ Numériquement, on obtient :}$$

$$V(y) = \frac{37^2 + 40^2 + 33^2 + 33^2 + 41^2 + 35^2}{6} - (36,5)^2 \simeq 9,92 \Rightarrow \sigma_y \simeq 3,149 .$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i \cdot y_i}{6} - \bar{x} \bar{y} =$$

$$\frac{(0,9 \times 37) + (1,2 \times 40) + (0,6 \times 33) + (0,5 \times 33) + (1,4 \times 41) + (1 \times 35)}{6} - (0,933 \times 36,5)$$

$$\text{soit : } \text{cov}(x, y) \simeq 0,933 . \text{ on en déduit que } r_1 = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{0,933}{0,314 \times 3,149} \simeq 0,942 .$$

Ainsi le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :  $r_1 \simeq 0,942$  .

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^6 z_i}{6} = \frac{3,9 + 3,7 + 3,2 + 3,3 + 3,6 + 3,7}{6} \simeq 3,56$$

$$V(z) = \frac{\sum_{i=1}^6 z_i^2}{6} - \bar{z}^2 . \text{ Numériquement, on obtient :}$$

$$V(z) = \frac{3,9^2 + 3,7^2 + 3,2^2 + 3,3^2 + 3,6^2 + 3,7^2}{6} - (3,56)^2 = 0,1064 \Rightarrow \sigma_z \simeq 0,326 .$$

$$\text{cov}(x, z) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i \cdot z_i}{6} - \bar{x} \bar{z} =$$

$$\frac{(0,9 \times 3,9) + (1,2 \times 3,7) + (0,6 \times 3,2) + (0,5 \times 3,3) + (1,4 \times 3,6) + (1 \times 3,7)}{6} - (0,933 \times 3,56)$$

$$\text{soit : } \text{cov}(x, z) = 0,0552 . \text{ on en déduit que } r_1 = \frac{\text{cov}(x, z)}{\sigma_x \times \sigma_z} = \frac{0,0552}{0,324 \times 0,326} \simeq 0,522 .$$

Ainsi le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z est :  $r_1 \simeq 0,522$  .

**b)** L'ajustement est d'autant plus justifié que r est proche de 1 .

$r_1$  étant plus proche de 1 que  $r_2$  , on en déduit que c'est l'ajustement entre X et Y qui donne une meilleure estimation de X .

$$3^\circ) D_{y/x} \text{ a pour équation : } y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} .$$

$$\text{soit : } D_{y/x} : y - 36,5 = \frac{0,933}{0,1051} (x - 0,933) \Leftrightarrow y = 9,43 x + 27,69 .$$

$$\text{Si } Y = 39, \text{ on obtient en remplaçant dans l'équation précédente : } x = \frac{39 - 27,69}{9,43} \simeq 1,2 .$$

On aura donc besoin de **1,2 tonnes de matières premières** pour espérer avoir un chiffre d'affaires de 39000 Francs .

## PROBLEME

### Partie A

$$1^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x^2} = \ll \frac{-1}{0^+} \gg = -\infty).$$

$$\text{D'autre part, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln 1 = 0.$$

Comme  $f(0) = 0$ , il en résulte que : **f est continue en 0** .

2<sup>o</sup>) a)  $\forall x \in ]0; 1[$ ,  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{1-x}{1+x}$  et  $(1-x)$  et  $(1+x)$  sont tous deux positifs sur l'intervalle  $]0; 1[$  . Donc :

$$\forall x \in ]0; 1[ \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|}{x} = \frac{\ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)}{x} = \frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^{-u^2} \quad (\text{on a posé } u = \frac{1}{x} ; \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^-, \\ u \text{ tend vers } -\infty) = \lim_{v \rightarrow +\infty} -v e^{-v^2} \quad (\text{en faisant le changement de variable } v = -u).$$

Or,  $\ln(v e^{-v^2}) = \ln v - v^2$  . Donc :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \ln(v e^{-v^2}) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \ln v - v^2 = \lim_{v \rightarrow +\infty} v \left( \frac{\ln v}{v} - v \right) = -\infty,$$

$$(\text{car } \lim_{v \rightarrow +\infty} v = +\infty \text{ et } \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln v}{v} = 0 \text{ donc } \lim_{v \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln v}{v} - v \right) = -\infty).$$

Finalement, on obtient :  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \ln(v e^{-v^2}) = -\infty$ , ce qui entraîne que :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} v e^{-v^2} = 0 \text{ et par conséquent : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

On en conclut que **f est dérivable à gauche en 0 et f'g(0) = 0** .

$$\text{D'autre part, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (\text{d'après a}).$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = -2.$$

En effet, on sait d'après le cours que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , et en faisant le changement de

$$\text{variable } v = -x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{v \rightarrow 0^-} -\frac{\ln(1+v)}{v} = -1.$$

On en conclut que **f est dérivable à droite en 0 et f'd(0) = -2** .

Les dérivées à droite et à gauche de f en 0 étant distinctes, **f n'est pas dérivable en 0** .

c) D'après les calculs précédents,  $(\mathcal{C})$  admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur  $f'_g(0) = 0$ , donc de vecteur directeur  $\vec{i}$ , et une demi-tangente à droite de coefficient directeur  $f'_d(0) = -2$ , donc de vecteur directeur  $\vec{i} + 2\vec{j}$ .  
 La demi-tangente à gauche a pour équation :  $y = 0$ .  
 La demi-tangente à droite a pour équation :  $y = -2x$ .

3°)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in ]-\infty; 0[$ ,  $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ , par application de la formule :  $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$ .

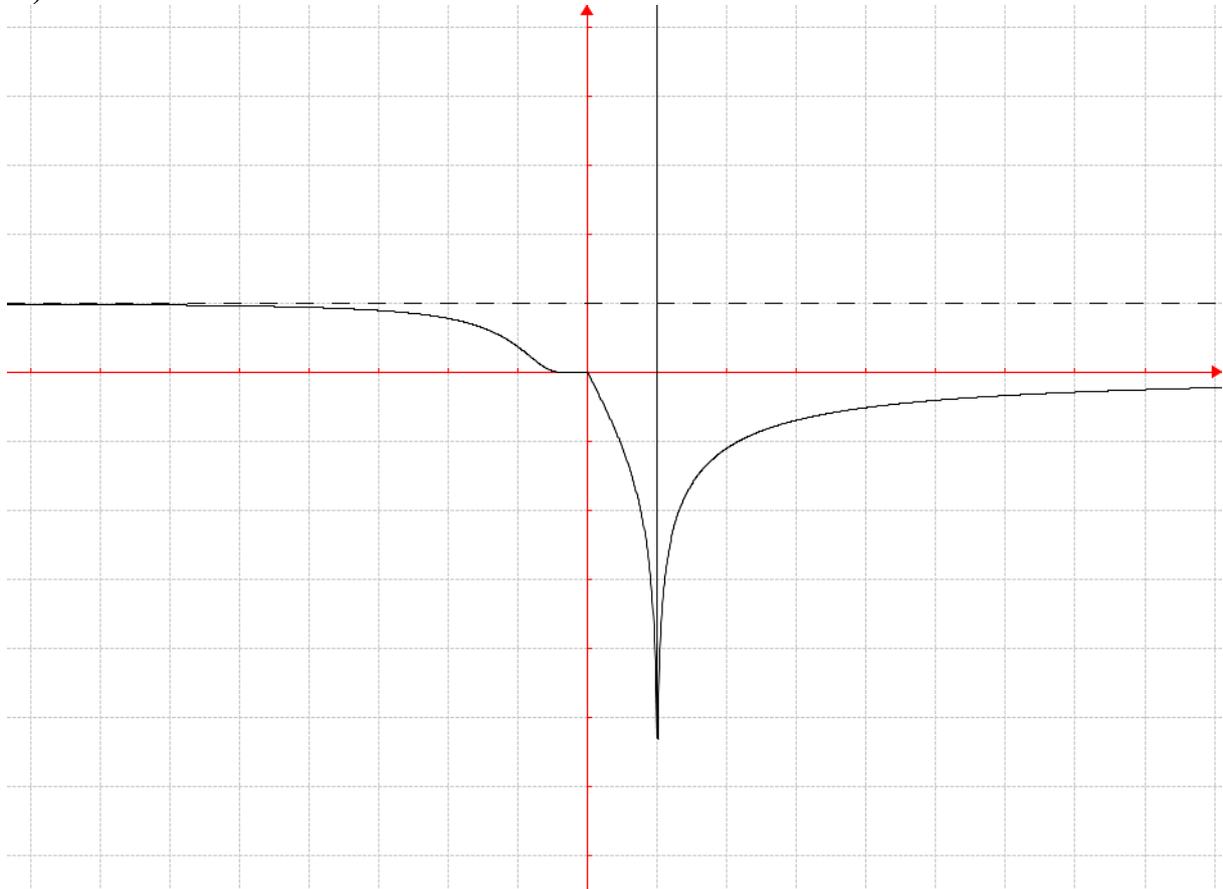
$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$  par application de la formule :

$$[\ln |u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

$f'(x)$  est donc négative sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; 1[$  et positive sur  $]1; +\infty[$ .  
 Le tableau de variation de  $f$  en découle.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-		+
f	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

4°)



### Partie B

1°) D'après le tableau de variation de A. 3°,  $g$  est continue et strictement croissante, donc bijective sur  $]1; +\infty[$ . L'intervalle  $J$  est  $] -\infty; 0[$ .

2°)  $-e \in ] -\infty; 0[$ , donc  $-e$  a un antécédent (unique !) par  $g$  puisque  $g$  est bijective.

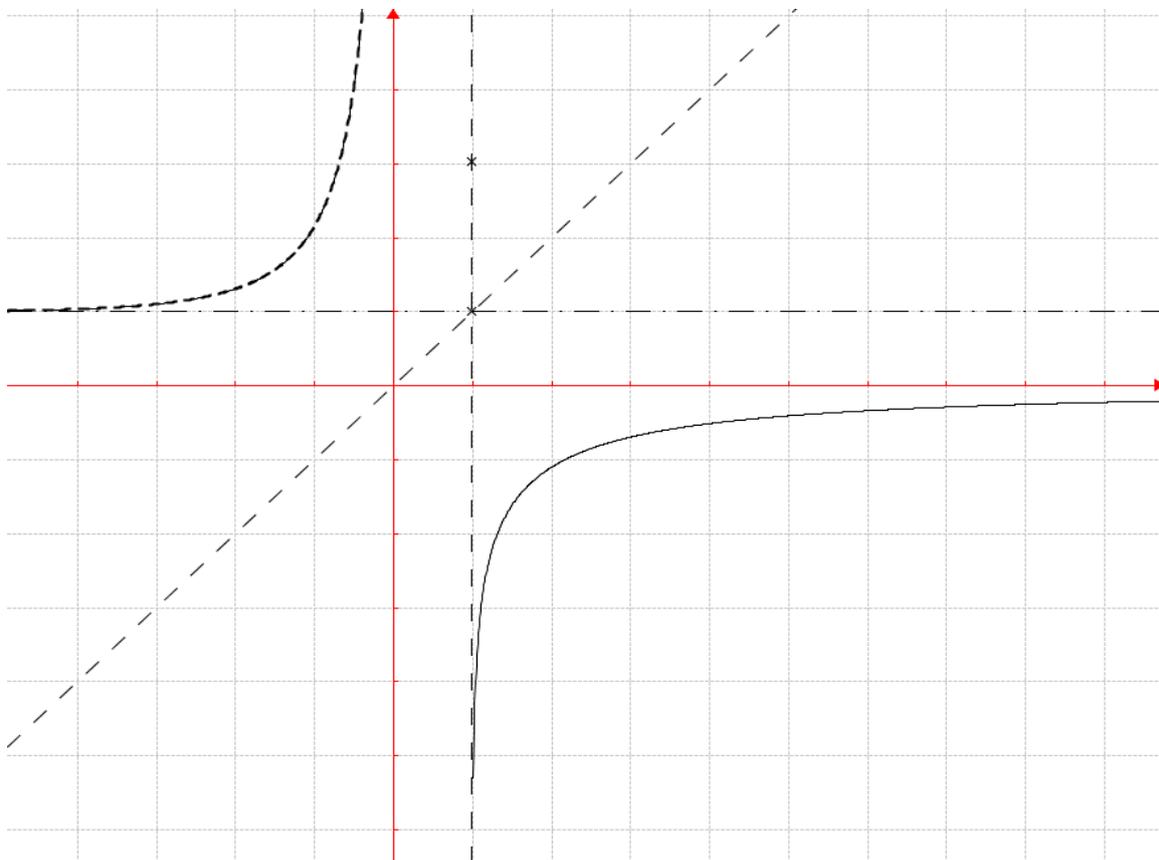
3°) Soit  $x \in ] -\infty; 0[$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \ln \frac{y-1}{y+1} = x \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = e^x \Leftrightarrow y = \frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in ] -\infty; 0[, g^{-1}(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

Or, on vérifie aisément que :  $1 - \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ . D'où l'égalité :  $g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$ .

4°)



$\mathcal{C}_g$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$  et une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .  $\mathcal{C}_h$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$  et une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} 5^\circ) \mathcal{A} &= 4 \times \int_{-\ln 7}^{-1} g^{-1}(x) dx = 4 \times \int_{-\ln 7}^{-1} \left( 1 - \frac{2e^x}{e^x-1} \right) dx = 4 \times \left[ x - 2 \ln |e^x - 1| \right]_{-\ln 7}^{-1} \\ &= 4 \left[ -1 - 2 \ln(1 - e^{-1}) + \ln 7 + 2 \ln(1 - e^{-7}) \right] = 4 \left( \ln 7 - 1 + 2 \ln \frac{1 - e^{-7}}{1 - e^{-1}} \right) \end{aligned}$$

**EXERCICE 1**

$$1^\circ) | -1 + i \tan a | = \sqrt{1 + \tan^2 a} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a}} = \frac{1}{\cos a}$$

(car  $\cos a$  est positif, puisque  $a \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ). Ainsi  $| -1 + i \tan a | = \frac{1}{\cos a}$

On a donc :  $-1 + i \tan a = \frac{1}{\cos a} (-\cos a + i \sin a) = \frac{1}{\cos a} (\cos(\pi - a) + i \sin(\pi - a))$ .

D'où l'on déduit que :  $\arg(-1 + i \tan a) = \pi - a$ .

2°)  $f_a$  est une similitude directe de rapport  $\frac{1}{\cos a}$ , d'argument  $\pi - a$ , de centre le point  $\Omega$

d'affixe  $\omega = \frac{-i \tan a + 2}{1 - (-1 + i \tan a)} = \frac{-i \tan a + 2}{2 - i \tan a} = 1$ . (Rappelons que le centre d'une

similitude directe d'écriture complexe  $z \mapsto az + b$  a toujours pour affixe  $\frac{b}{1-a}$ ).

3°)  $r_a$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{1}{\cos a}$ . Son écriture complexe est donc :

$$z' - \omega = e^{\frac{i}{\cos a}} (z - \omega) \text{ avec } \omega = 1, \text{ soit : } z' = e^{\frac{i}{\cos a}} z + 1 - e^{\frac{i}{\cos a}}$$

**EXERCICE 2**

1°)  $P(S \cap N) = P(N | S) \times P(S)$ .  $P(N | S)$  est la probabilité de tirer une boule noire de l'urne  $U_2$ , donc  $P(N | S) = \frac{1}{3}$ .  $P(S) = \frac{1}{6}$ . D'où :  $P(S \cap N) = \frac{1}{18}$ .

De même :  $P(\bar{S} \cap N) = P(N | \bar{S}) \times P(\bar{S})$ .  $P(N | \bar{S})$  est la probabilité de tirer une boule noire de l'urne  $U_1$ , donc  $P(N | \bar{S}) = \frac{3}{4}$ .  $P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$ . D'où :  $P(\bar{S} \cap N) = \frac{5}{8}$ .

2°)  $P(N) = P(S \cap N) + P(\bar{S} \cap N) = \frac{1}{18} + \frac{5}{8} \Rightarrow P(N) = \frac{49}{72}$ .

3°)  $P(S | \bar{N}) = \frac{P(S \cap \bar{N})}{P(\bar{N})}$ . Or,  $P(S \cap \bar{N}) + P(S \cap N) = P(S)$ , donc :

$$P(S \cap \bar{N}) = P(S) - P(S \cap N) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9} ; \text{ et } P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - \frac{49}{72} = \frac{23}{72}$$

Finalement, on obtient :  $P(S | \bar{N}) = \frac{8}{23}$ .

**EXERCICE 3**

$$1^\circ) \text{ a) } U_{n+1} = \exp\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1-n}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{n}{2}\right) \\ = e^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \times U_n.$$

$(U_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $e^{-\frac{1}{2}}$ , de premier terme  $U_1 = \exp(1) = e$ .

$$\text{b) } V_{n+1} = \ln U_{n+1} = \ln \left( e^{-\frac{1}{2}} \times U_n \right) = \ln \left( e^{-\frac{1}{2}} \right) + \ln (U_n) = -\frac{1}{2} + \ln (U_n) = -\frac{1}{2} + V_n.$$

Donc  $(V_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-\frac{1}{2}$ .

2°) a)  $S_n$  est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $e^{-\frac{1}{2}}$ , de premier terme

$$e, \text{ donc } S_n = e \times \frac{1 - e^{-\frac{n+1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}; \text{ en remarquant que : } e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \text{ et en réduisant au même}$$

$$\text{dénominateur, on obtient après simplification : } S_n = e \sqrt{e} \left( \frac{1 - e^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{e} - 1} \right).$$

$\ln P_n = \sum_{i=0}^{i=n} V_n$  ( car le logarithme d'un produit de réels positifs est égale à la somme des leurs logarithmes ). Cette dernière somme est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison  $-\frac{1}{2}$ , de premier terme  $V_0 = \ln U_0 = \ln e = 1$ . D'où :

$$\sum_{i=0}^{i=n} V_n = (n+1) \frac{V_0 + V_n}{2}. \text{ Or, } V_n = 1 - \frac{n}{2} \text{ d'après 1° b. D'où : } \sum_{i=0}^{i=n} V_n = (n+1) \frac{4-n}{4}.$$

$$\text{Par conséquent : } P_n = \exp \left( (n+1) \frac{4-n}{4} \right).$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{n+1}{2}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \frac{4-n}{4} = -\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0.$$

#### **EXERCICE 4**

1°)  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables et :

$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = 2e^{2x} + 4 > 0$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - 2 = -1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty).$$

$f$  étant continue et strictement monotone (croissante) réalise une bijection de  $I = [0; +\infty[$  vers  $J = [-1; +\infty[$ .

2°) 0 étant un élément de  $J$ , 0 a un antécédent unique par la bijection  $f$ , en d'autres termes, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $I$ .

$f(0,1) \simeq -0,378$ .  $f(0,2) \simeq 0,29$ .  $f(0,1) \times f(0,2) < 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires  $f$  prend au moins une fois la valeur 0 sur l'intervalle  $[0,1; 0,2]$ .

D'où  $\alpha \in [0,1; 0,2]$ .

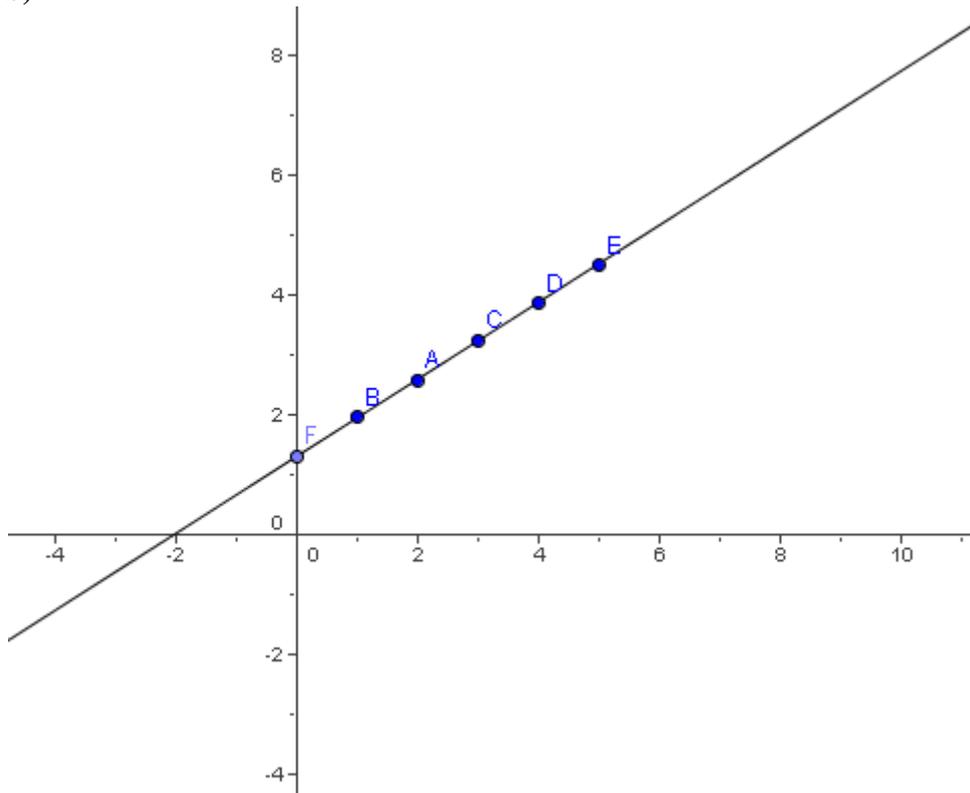
**EXERCICE 1**

1°) a) On trouve, en calculant les valeurs de  $\ln P$  :

$$y_1 = \ln 7 \approx 1,94591 ; \quad y_2 = \ln 13 \approx 2,56494 ; \quad y_3 = \ln 25 \approx 3,21887 ;$$

$$y_4 = \ln 47 \approx 3,85014 ; \quad y_5 = \ln 88 \approx 4,47733 .$$

b)



2°) Pour avoir les paramètres de la série statistique  $(X, Y)$ , nous présentons les calculs dans un tableau :

$x_i$	1	2	3	4	5	$\Sigma x_i = 15$
$y_i$	1,94591	2,56494	3,21887	3,85014	4,47733	$\Sigma y_i = 16,05719$
$x_i y_i$	1,94591	5,1388	9,65661	15,40056	22,38665	$\Sigma x_i y_i = 54,52853$
$x_i^2$	1	4	9	16	25	$\Sigma x_i^2 = 55$
$y_i^2$	3,7865	6,5789	10,3611	14,8235	20,0464	$\Sigma y_i^2 = 55,5964$

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \times \Sigma x_i = 3 ; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \times \Sigma y_i = 3,21 ; \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{5} \Sigma x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = 1,27.$$

$$V(x) = \frac{1}{5} \Sigma x_i^2 - \bar{x}^2 = 2 . \text{ L'équation de la droite de régression de } Y \text{ en } X \text{ est :}$$

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \text{ avec } a = \frac{\sigma_{xy}}{V(x)} = 0,635 , \text{ d'où:}$$

$$D_{y/x} : y = 0,635 x + 1,3 .$$

3°) Le poids  $P$  au bout de six mois est, en utilisant la droite d'ajustement précédente,  $P$  tel que  $\ln P = 0,635 \times 6 + 1,3$  soit  $\ln P \simeq 5,11$ , d'où :  $P = e^{5,11} \simeq 165,7 \text{ mg}$ .

### EXERCICE 2

1°) a) Soit  $a$  une solution réelle éventuelle de (E). On doit avoir :

$a^3 + (3 - 2i)a^2 + (1 - 4i)a - 1 - 2i = 0$ , soit en séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$a^3 + 3a^2 + a - 1 - i(2a^2 + 4a + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3a^2 + a - 1 = 0 \\ 2a^2 + 4a + 2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant la seconde équation, on trouve que  $a = -1$ , et la première équation est également satisfaite pour  $a = -1$ . Ainsi la solution réelle est  $-1$ .

b) Utilisons la méthode de Hörner pour factoriser le premier membre de (E).

	1	$3 - 2i$	$1 - 4i$	$-1 - 2i$
$-1$		$-1$	$-2 + 2i$	$1 + 2i$
	1	$2 - 2i$	$-1 - 2i$	0

(E)  $\Leftrightarrow (z + 1)[z^2 + (2 - 2i)z - (1 + 2i)] = 0$ . Le trinôme entre crochets a pour discriminant :  $\Delta' = (1 - i)^2 + 1 + 2i = 1$ ; d'où les racines :  $z' = -2 + i$  et  $z'' = i$ . Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :  $S = \{-1; -2 + i; i\}$ .

2°) a)  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2 + i + 1}{i + 1} = \frac{i - 1}{i + 1} = \frac{(i - 1)^2}{(i + 1)(i - 1)} = \frac{-2i}{-2} = i$ . Donc :

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

b) Les deux relations précédentes se traduisent géométriquement par :  $AB = AC$  et

$(\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$ . Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A.

c) D'après a),  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Rightarrow z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A) \Rightarrow z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

On déduit de cette écriture que la similitude de centre A, de rapport 1, d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ , transforme B en C.

N.B. Cette similitude n'est autre que la rotation de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

### PROBLEME      Partie A

1°) Pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si  $x \neq 1$  (or, 1 n'est pas élément de cet ensemble) et pour  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f(x)$  est toujours définie. on en conclut que :

$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[ \cup [0; +\infty[ .$$

$$f(-2) = 2 + \ln \left| \frac{-2 - 1}{-2 + 1} \right| = 2 + \ln 3 .$$

$$f(3) = 3^2 e^{-3} = \frac{9}{e^3} .$$

$$2^\circ) \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 0 \text{ (car : } \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln 1 = 0 \text{.)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{-x} = 0 \text{ (car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \text{.)}$$

$$\bullet f(0) = 0^2 e^{-0} = 0.$$

Ces trois calculs entraînent que  $f$  est continue en  $0$ .

$$3^\circ) \text{ a) Si } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[, f'(x) = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x-1}{x+1}$$

$$= 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

$$\text{Si } x \in [0; +\infty[, f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x} (2-x).$$

$$\text{b) } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \frac{\ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\ln(1-x)}{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - 1 - 1 = -1.$$

$$\text{(Rappelons que : } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \text{.)}$$

**$f$  est donc dérivable à gauche de  $0$  et :  $f'_g(0) = -1$ .**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-x} = 0$$

$$\text{(car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \text{.)}$$

**$f$  est donc dérivable à droite de  $0$  et :  $f'_d(0) = 0$ .**

On en conclut que  **$f$  n'est pas dérivable en  $0$** . Au point d'abscisse  $0$ , la courbe présente un point anguleux (deux demi-tangentes de directions différentes).

3°) Le signe de  $f'(x)$  découle des expressions de  $f'(x)$  trouvées en A. 3° a). On obtient :

$x$	$-\infty$	$0$
$x^2 + 1$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	$-$
$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	$+$	$-$

$x$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	

d'où le tableau de variation de  $f$  :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
f'(x)	+	-	+	-	
f	$-\infty$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln 1 = 0.)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty).$$

De manière analogue, on montre que :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ .

Enfin  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$  (en appliquant le théorème de croissance

comparée qui dit que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .)

4°) D'après le tableau de variation précédent, f est continue et strictement monotone, donc bijective sur  $] -\infty ; -1[$  et l'image de  $] -\infty ; -1[$  par f est  $\mathbf{R}$ . Comme  $0 \in \mathbf{R}$ , 0 a un antécédent unique par f, en d'autres termes, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $] -\infty ; -1[$ . Nommons  $\alpha$  cette solution.  $f(-1,6) \simeq -0,13$ ;  $f(-1,5) \simeq 0,109$ . Comme  $f(-1,6) \times f(-1,5) < 0$ , s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $] -1,6 ; -1,5[$ ; il en résulte donc que  $\alpha \in ] -1,6 ; -1,5[$ .

$$5^\circ) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln 1 = 0 \text{ (théorème sur la limite$$

d' une fonction composée : on en conclut que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $-\infty$ .

b) Pour  $x \in ] -\infty ; -1[ \cup ] -1 ; 0[$ ,  $f(x) - x = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ . Le signe de cette dernière

quantité dépend de la place de  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right|$  par rapport à 1. Résolvons donc :  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$ . cela

$$\text{revint à : } -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow -1 - \frac{x-1}{x+1} < 0 \text{ et } 1 - \frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{x+1} < 0 \text{ et}$$

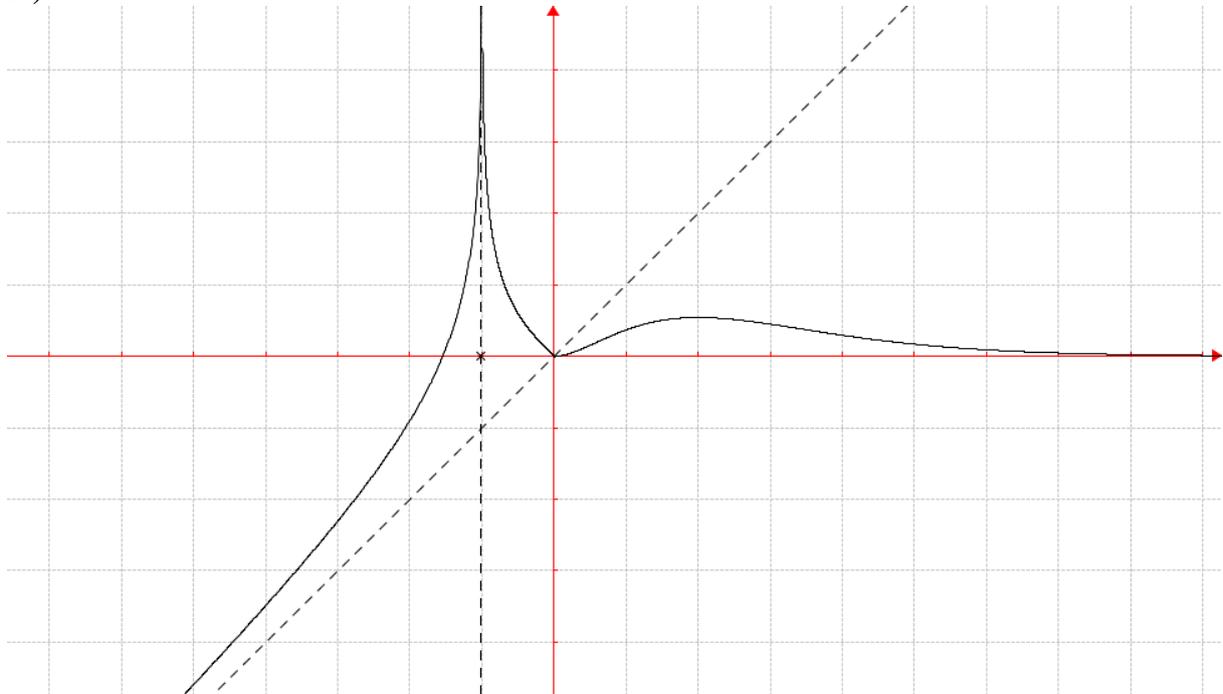
$$\frac{2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in ] -1 ; 0[.$$

Conclusion : si  $x \in ]-1; 0[$ , on a  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$ , d'où  $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 0$ ,

c'est-à-dire  $f(x) - x < 0$  : dans ce cas  $(\mathcal{C})$  est en-dessous de  $(D)$ .

si  $x \in ]-\infty; -1[$ , on a  $f(x) - x > 0$ , d'où :  $(\mathcal{C})$  est au-dessus de  $(D)$ .

6°)



### Partie B

1°) D'après le tableau de variation de la partie A 3),  $f$  est continue et strictement croissante, donc bijective de  $[0; 2]$  vers  $J = [0; 4e^{-2}]$ .

2°) a)  $g^{-1}(x) = 1 \Leftrightarrow x = g(1) \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

b)  $g^{-1}'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{g'[g^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)]} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{e^{-1}} = e$ . (Application du théorème de la dérivée

d'une réciproque).

3°) On utilise la symétrie d'axe  $(D)$  (cf. schéma ci-dessus).

### Partie C

1°) a)  $I(\lambda)$  est l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

b)  $I(\lambda) = \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$ . Intégrons une première fois par parties en posant :

$u(x) = x^2$  et  $v'(x) = e^{-x}$ . D'où :  $u'(x) = 2x$  et  $v(x) = -e^{-x}$ .

On a :  $I(\lambda) = \left[ -x^2 e^{-x} \right]_0^\lambda + 2 \int_0^\lambda x e^{-x} dx = -\lambda^2 e^{-\lambda} + 2 \int_0^\lambda x e^{-x} dx .$

Posons  $J(\lambda) = \int_0^\lambda x e^{-x} dx$  et intégrons une deuxième fois par parties en posant :

$u(x) = x$  et  $v'(x) = e^{-x}$ . D'où :  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -e^{-x}$ .

On a :  $J(\lambda) = \left[ -x e^{-x} \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + \left[ -e^{-x} \right]_0^\lambda = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 .$

En reportant , on obtient finalement :

$$I(\lambda) = -\lambda^2 e^{-\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda} + 2 .$$

2°)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 2$  (car, dans l'expression de  $I(\lambda)$ , tous les termes en  $e^{-\lambda}$  ont pour limite

0 quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  .

3°) a)  $I(2) = -10 e^{-2} + 2$  (en remplaçant par 2 dans l'expression de  $I(\lambda)$  ) .

b) Par symétrie orthogonale d'axe (D), l'aire étant invariante par symétrie, cette aire est la même que celle limitée par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 2$ , soit  $I(2)$ . Elle vaut donc :  $4(-10 e^{-2} + 2)$   $\text{cm}^2$ , soit à peu près  $2,586 \text{ cm}^2$  .

## BAC S2 1998 Remplacement SOLUTION

### EXERCICE 1

**a)** Posons  $z = z_1$  avec  $z_1 \in \mathbf{R}$ . L'équation devient :  $i z_1^2 + (1 - 5i) z_1 + 6i - 2 = 0$ . En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :  $z_1 - 2 + i(z_1^2 - 5z_1 + 6) = 0$  d'où nécessairement  $z_1 = 2$ . Soit  $z_2$  l'autre solution. On a  $z_1 z_2 = 6i - 2$ , d'où  $z_2 = 3i - 1$ .

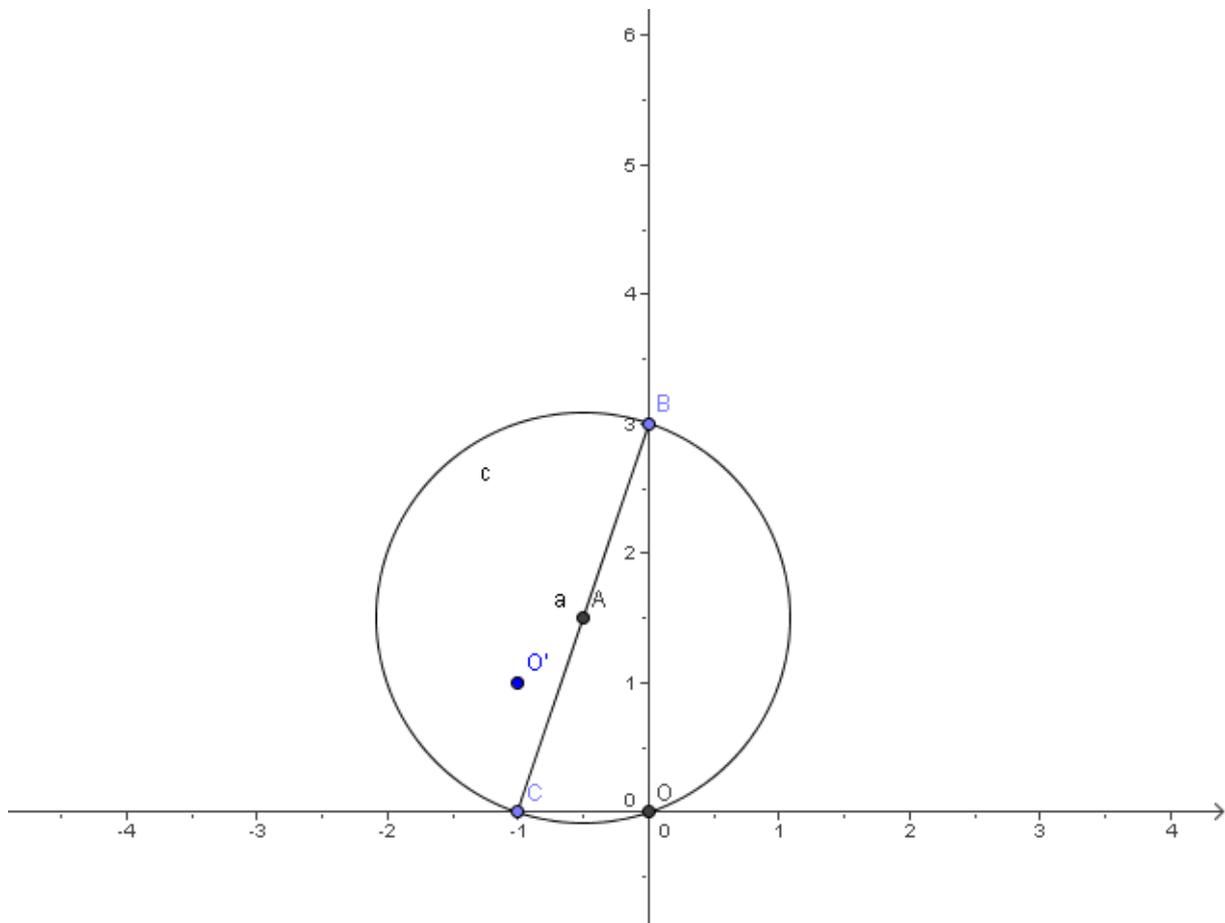
**b)**  $C \in (O, \vec{e}_1) \Rightarrow z_C \in \mathbf{R}$ . C est équidistant de  $M_1$  et  $M_2 \Leftrightarrow |z_C - z_1| = |z_C - z_2|$   
 $\Leftrightarrow |z_C - 2| = |z_C + 1 + 3i| \Leftrightarrow (z_C - 2)^2 = (z_C + 1)^2 + 9 \Leftrightarrow -4z_C + 4 = 2z_C + 10$   
 $\Leftrightarrow z_C = -1$ . Donc C est le point de coordonnées  $(-1; 0)$ .

**c) a)** L'angle de cette rotation est :  $(\vec{CM}_1, \vec{CM}_2) = \arg\left(\frac{z_2 - z_C}{z_1 - z_C}\right) = \arg\left(\frac{3i}{3}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ .

**β)**  $R_1$  est l'application qui, au point M d'affixe  $z$ , associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que :  $z' + 1 = i(z + 1)$ . Si  $z = 0$ , on obtient :  $z' = -1 + i$ .  
 Donc  $O'$  est le point de coordonnées  $(-1; 1)$ .

**d) a)**  $R_2 \circ R_1$  est une rotation, car composée de deux rotations de même centre, d'angle  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ , donc une symétrie centrale de centre O.

**β)** Pour y voir clair, faisons un schéma :



Le triangle BOC est rectangle en C. Le centre du cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  à ce triangle est donc le milieu de [BC], soit le point I d'affixe  $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{3i - 1}{2}$  et son rayon est :

$$IO = \left| \frac{3i - 1}{2} \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}. \text{ L'image de } \mathcal{C} \text{ par } R_2 \circ R_1 \text{ est donc le cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre}$$

$$I' = S_O(I) \text{ et de même rayon } \frac{\sqrt{10}}{2}. I' \text{ a pour affixe } \frac{1 - 3i}{2}.$$

## EXERCICE 2

1°) a)  $D_f = \mathbf{R}$ .  $\forall x \in D_f, f(-x) = -x \ln |-x| = -x \ln |x| = -f(x)$  : f est impaire .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 : f \text{ est continue en } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty : f \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

b)  $\forall x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \ln x + 1$ . Voici le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

2°) a)  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x \ln x dx$ . On intègre par parties en posant :

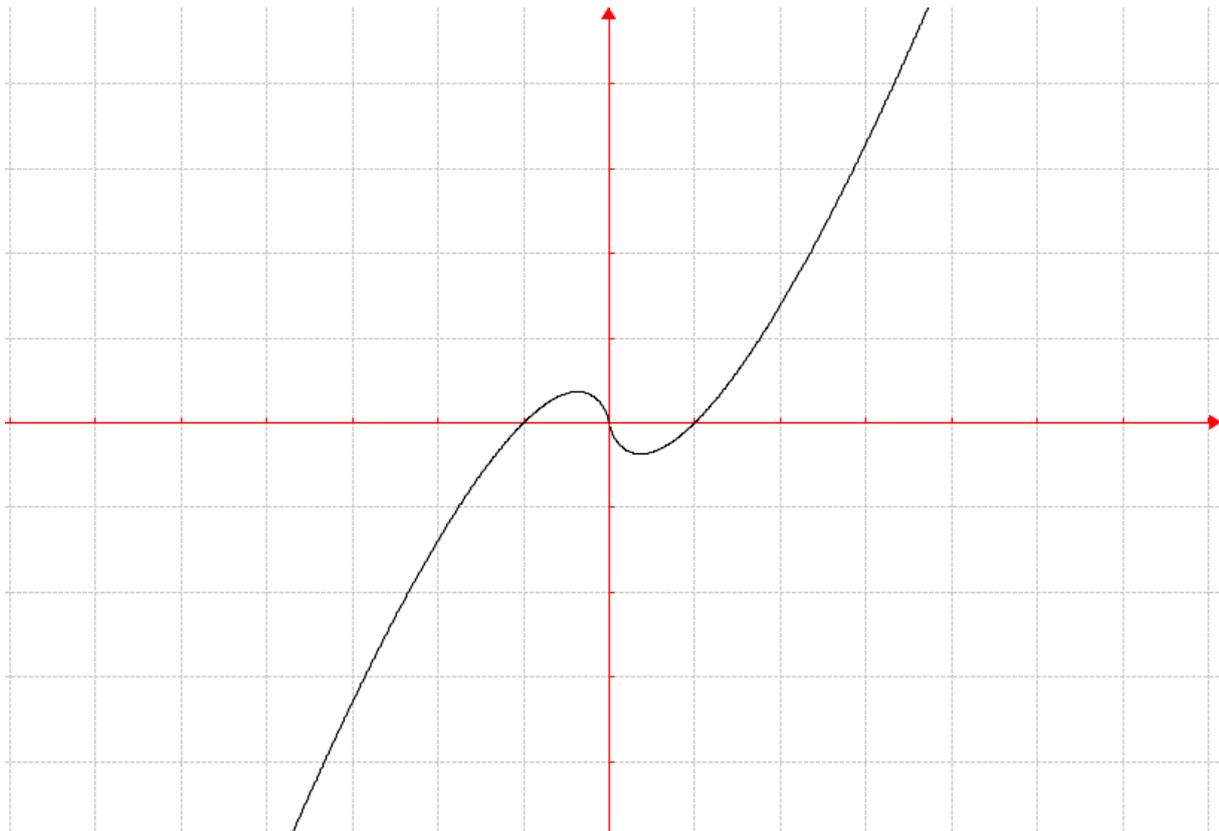
$$u(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = x. \text{ D'où : } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$I(\alpha) = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{x}{2} dx = -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_{\alpha}^1 = -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4}.$$

$$\text{b) } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha) = -\frac{1}{4} \text{ car : } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^2}{4} = 0.$$

b)  $-\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$  est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .

3°)



—  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$  est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = 1$ .

L'aire demandée vaut :  $-2 \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha) = \frac{1}{2}$  U.A.

### EXERCICE 3

1°) a)  $(U_n)$  est une suite **arithmétique** de raison 2 car :  $U_{n-1} - U_n = 2$ .

b) Le centième terme est  $u_{99} = u_0 + 99 \times 2 = 1 + 198 = \mathbf{199}$ .

c)  $S = \frac{100(1 + 199)}{2} = \mathbf{10\ 000}$ .

2°) a)  $V_{n+1} = U_{n+1} + 1 = 3U_n + 3 = 3V_n$  :  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison **3**, de premier terme  $V_0 = 2$ .

b)  $V_n = 2 \times 3^n$ .  $U_n = 2 \times 3^n - 1$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$  (car  $3 > 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ ) :

la suite  $(U_n)$  **diverge**.

3°) a)  $\omega_{n+1} = U_{n+1} - \frac{2}{1-a} = aU_n + 2 - \frac{2}{1-a} = aU_n - \frac{2a}{1-a} = a \left( U_n - \frac{2}{1-a} \right) = a\omega_n$

$(\omega_n)$  est une suite géométrique de raison **a**, de premier terme  $\omega_0 = U_0 - \frac{2}{1-a} = 1 - \frac{2}{1-a}$ ,

soit  $\omega_0 = \frac{a+1}{a-1}$ .

b)  $(\omega_n)$  converge si  $|a| < 1$ . Dans ce cas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = 0$ , d'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{2}{1-a}$ .

N.B. Dans le 2°, on a étudié le cas particulier où  $a = 3$ , ce qui confirme bien la non-convergence de  $(U_n)$  dans ce cas.

#### **EXERCICE 4**

1°) Tableau des valeurs de la série statistique  $(Z, X)$  :

Z	0	8	14	21	28	36
X	3984	3011	2460	1652	1448	982

$$2^\circ) \quad \bar{z} = \frac{1}{6} \times \sum z_i = 17,833 ; \quad \bar{y} = \frac{1}{6} \times \sum y_i = 2256,1667$$

$$V(z) = \frac{1}{6} \sum z_i^2 - \bar{z}^2 \text{ et } \sigma_z = \sqrt{V(z)}. \text{ On trouve : } \sigma_z = 12,06 .$$

$$V(y) = \frac{1}{6} \sum y_i^2 - \bar{y}^2 \text{ et } \sigma_y = \sqrt{V(y)}. \text{ On trouve : } \sigma_y = 1019,67 .$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{6} \sum z_i y_i - \bar{z} \times \bar{y} = \frac{169\,116}{6} - (17,833 \times 2256,1667) = -12\,048,96 .$$

$$\text{Le coefficient de corrélation linéaire est : } r = \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z \times \sigma_y} \simeq -0,9797 .$$

$r$  est très proche de  $-1$  : il y a une forte corrélation linéaire entre  $Z$  et  $Y$  .

$$3^\circ) D_{y/z} \text{ a pour équation : } y - \bar{y} = a(z - \bar{z}) \text{ avec } a = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z^2} \simeq -82,82 .$$

Après calculs, on trouve qu'une équation de  $D_{y/x}$  est :  $y = -82,82x + 3733,24$  .

